فصل ۳

معادلات با مشتقات جزئی

امروزه معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای[۱] (PDEs) به قدری در ریاضیات، علوم طبیعی و مهندسی پرکاربرد شده‌اند که بعضی از آن به عنوان زبان بین رشته‌ای یاد می‌کنند. یک PDE به زبان ساده یک معادله است که در آن یک تابع چندمتغیره و مشتقات پاره‌ای آن ظاهر می‌گردند و این به زبان ریاضی یعنی

$$F\left(x_۱,\dots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_۱},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^۲ u}{\partial x_۱^۲},\frac{\partial^۲ u}{\partial x_۱\partial x_۲},\dots\right)=۰,$$

که در آن $u=u(x_۱,\dots,x_n)$ تابعی مجهول است. مرتبه یک PDE عبارت است از بالاترین مرتبه مشتقی که در آن ظاهر می‌شود. یک PDE خطی نامیده می‌شود هرگاه تابع u و مشتقات پاره‌ای آن به صورت خطی ظاهر شده باشند. به عنوان مثال معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=۰,$$

به معادله برگرز[۲] معروف بوده و یک PDE غیرخطی مرتبه اول است.

تعریف ۱.۳ یک PDE *خطی مرتبه دوم دو متغیره به صورت*

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G(x,y),$$

است که در آن اندیس‌ها بیان‌گر مشتق بوده و ضرایب A، B، C، D، E و F می‌توانند توابعی از x و y یا ثابت باشند. در ناحیه‌هایی که $B^۲-۴AC>۰$ یا $B^۲-۴AC=۰$ یا $B^۲-۴AC<۰$، PDE را هذلولوی یا سهموی یا بیضوی می‌نامند. اگر یکی از متغیرهای x و y بیان‌گر زمان باشند PDE را وابسته به زمان و در غیر این صورت مستقل از زمان می‌نامند.

تذکر ۱.۳ یک PDE *در حالت کلی ممکن است جواب‌های بی‌شماری داشته باشد و به منظور دست‌یابی به جواب یکتا، در کنار یک PDE شرایطی ارایه می‌شود که اگر این شرایط روی متغیر زمان باشند به شرایط اولیه و در غیر این صورت به شرایط مرزی معروف هستند. یک PDE همراه با شرایط اولیه یا شرایط مرزی یا هم شرایط اولیه هم شرایط*

[۱] Partial differential equations

[۲] Burgers' equation

مرزی به مسئله مقدار اولیه یا مسئله مقدار مرزی یا مسئله مقدار اولیه-مرزی معروف است.

در این فصل قصد داریم از میان روش‌های متنوع حل عددی یک PDE، روش ساده و پرکاربرد تفاضل متناهی (FD) را بررسی کنیم. همان طور که در فصل قبل دیدیم اساس روش FD، استفاده مناسب از روابط تفاضلی تقریبی است که به کمک بسط تیلور به دست می‌آیند. به همین منظور با توجه به بسط تیلور برای توابع یک متغیره، با ثابت فرض کردن یکی از متغیرهای تابع دو متغیره u خواهیم داشت

$$u(x+h,y) = u(x,y) + hu_x(x,y) + \frac{h^۲}{۲!}u_{xx}(x,y) + \cdots, \tag{۱.۳}$$

و از آن‌جا داریم

$$u_x(x,y) = \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} - \frac{h}{۲!}u_{xx}(x,y) + \cdots,$$

و یا

$$u_x(x,y) = \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} - \frac{h}{۲!}u_{xx}(\xi_h,y),$$

که در آن ξ_h بین x و $x+h$ قرار دارد. رابطه (تقریب) تفاضلی پیشروی مشتق مرتبه اول نسبت به متغیر x با بازنویسی این رابطه به صورت

$$u_x(x,y) = \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + O(h),$$

به دست می‌آید. به کمک روشی مشابه با توجه به بسط تیلور

$$u(x-h,y) = u(x,y) - hu_x(x,y) + \frac{h^۲}{۲!}u_{xx}(x,y) - + \cdots, \tag{۲.۳}$$

داریم

$$u_x(x,y) = \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h} + \frac{h}{۲!}u_{xx}(x,y) + \cdots,$$

و یا

$$u_x(x,y) = \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h} + \frac{h}{۲!}u_{xx}(\xi_h,y),$$

که در آن ξ_h بین x و $x-h$ قرار دارد. رابطه (تقریب) تفاضلی پسروی مشتق مرتبه اول نسبت به متغیر x با بازنویسی این رابطه به صورت

$$u_x(x,y) = \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h} + O(h),$$

به دست می‌آید. با کم کردن رابطه (۲.۳) از (۱.۳) خواهیم داشت

$$u_x(x,y) = \frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{۲h} - \frac{h^۲}{۳!}u_{xxx}(x,y) + \cdots,$$

و یا

$$u_x(x,y) = \frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{۲h} - \frac{h^۲}{۳!}u_{xxx}(\xi_h,y),$$

که در آن ξ_h بین $x-h$ و $x+h$ قرار دارد. رابطه (تقریب) تفاضلی مرکزی مشتق مرتبه اول نسبت به متغیر x با بازنویسی این رابطه به صورت

$$u_x(x,y) = \frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{2h} + O(h^2),$$

به دست می‌آید. با جمع کردن روابط (۱.۳) و (۲.۳) خواهیم داشت

$$u_{xx}(x,y) = \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2} - \frac{2h^2}{4!}u_{xxxx}(x,y) - \cdots,$$

و یا

$$u_{xx}(x,y) = \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2} - \frac{2h^2}{4!}u_{xxxx}(\xi_h,y),$$

که در آن ξ_h بین $x-h$ و $x+h$ قرار دارد. رابطه (تقریب) تفاضلی مرکزی مشتق مرتبه دوم نسبت به متغیر x با بازنویسی این رابطه به صورت

$$u_{xx}(x,y) = \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2} + O(h^2),$$

به دست می‌آید.

تذکر ۲.۳ *می‌توان از بسط تیلور $u(x+2h,y)$، $u(x-2h,y)$، $u(x+3h,y)$، $u(x-3h,y)$ و ... نیز استفاده کرد و تقریب‌های تفاضلی با مرتبه‌های بالاتری به دست آورد.*

تذکر ۳.۳ *تقریب‌های تفاضلی به دست آمده با ثابت فرض کردن متغیر y به دست آمدند. به طور مشابه می‌توان با ثابت در نظر گرفتن متغیر x، تقریب‌های تفاضلی مشتقات نسبت به متغیر y را نیز به دست آورد.*

تذکر ۴.۳ *اگر PDE وابسته به زمان باشد به جای متغیر y از متغیر t استفاده می‌کنیم.*

۱.۳ معادلات بیضوی

معادله دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای بیضوی در نظر گرفته شده، معادله پواسن[3]

$$\nabla^2 u(x,y) = \Delta u(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y),$$

روی ناحیه $\Omega = \{(x,y) | a < x < b,\ c < y < d\}$ همراه با شرط مرزی

$$u(x,y) = g(x,y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega,$$

است که در آن منظور از $\partial\Omega$ مرز Ω است. به شرط پیوستگی توابع f و g، این مسئله جواب یکتا دارد. این معادله در مطالعه مسایل فیزیکی مستقل از زمان متنوعی چون توزیع حالت مانای دما در یک ناحیه از صفحه، انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای گرانشی یک نقطه در صفحه و مسایل حالت مانای دو بعدی سیالات تراکم‌ناپذیر ظاهر می‌شود.

[3] Poisson equation

تذکر ۵.۳ *این معادله در حالت خاص* $f(x,y)\equiv ۰$ *به معادله لاپلاس[۴] تبدیل می‌شود.*

در اولین گام از روش FD، اعداد صحیح n و m را انتخاب کرده و اندازه گام‌های $h=(b-a)/n$ و $k=(d-c)/m$ را تعریف می‌کنیم. سپس بازه $[a,b]$ را به n قسمت برابر به طول h و بازه $[c,d]$ را به m قسمت برابر به طول k تقسیم می‌کنیم. با رسم خطوط افقی و عمودی با فاصله‌های به ترتیب k و h، ناحیه Ω را شبکه‌بندی می‌کنیم (به شکل ۱.۳ رجوع شود).

شکل ۱.۳: شبکه‌بندی برای مسئله پواسن

نقاط (x_i,y_j) و خطوط $x=x_i$ و $y=y_j$ که در آن $x_i=a+ih$ و $y_j=c+jk$ برای $i=۰,\dots,n$ و $j=۰,\dots,m$ به ترتیب به نقاط و خطوط شبکه معروف هستند. برای هر نقطه درونی شبکه یعنی (x_i,y_j) به طوری که $i=۱,\dots,n-۱$ و $j=۱,\dots,m-۱$ داریم

$$\nabla^{۲}u(x_i,y_j)=\Delta u(x_i,y_j)\equiv u_{xx}(x_i,y_j)+u_{yy}(x_i,y_j)=f(x_i,y_j).$$

به کمک تقریب تفاضلی مرکزی مشتق مرتبه دوم نسبت به متغیرهای x و y خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\tfrac{u(x_{i-۱},y_j)-۲u(x_i,y_j)+u(x_{i+۱},y_j)}{h^{۲}}+\tfrac{u(x_i,y_{j-۱})-۲u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j+۱})}{k^{۲}}\\&\qquad=f(x_i,y_j)+\tfrac{h^{۲}}{۱۲}u_{xxxx}(\xi_i,y_j)+\tfrac{k^{۲}}{۱۲}u_{yyyy}(x_i,\eta_j),\end{aligned}$$

که در آن ξ_i بین $x_{i-۱}$ و $x_{i+۱}$ و η_j بین $y_{j-۱}$ و $y_{j+۱}$ قرار دارد. با ساده‌سازی این رابطه و با این فرض که w_{ij} بیان‌گر تقریبی برای $u(x_i,y_j)$ باشد و $f_{ij}=f(x_i,y_j)$ برای $i=۱,\dots,n-۱$ و $j=۱,\dots,m-۱$ داریم

$$۲\left(\left(\frac{h}{k}\right)^{۲}+۱\right)w_{ij}-(w_{i-۱,j}+w_{i+۱,j})-\left(\frac{h}{k}\right)^{۲}(w_{i,j-۱}+w_{i,j+۱})=-h^{۲}f_{ij}. \qquad (۳.۳)$$

برای استفاده از این رابطه، بنابر شرایط مرزی به روابط زیر نیاز خواهیم داشت

$$\begin{cases}w_{۰j}=g(x_۰,y_j),\quad w_{nj}=g(x_n,y_j),\quad j=۰,\dots,m,\\ w_{i۰}=g(x_i,y_۰),\quad w_{im}=g(x_i,y_m),\quad i=۱,\dots,n-۱.\end{cases}$$

رابطه (۳.۳) به طرح (معادله) تفاضلی پنج نقطه‌ای برای معادله پواسن معروف است و ثابت می‌شود خطای برش موضعی آن از مرتبه $O(h^{۲}+k^{۲})$ است (البته به شرط هموازی u به اندازه کافی).

[۴] Laplece's equation

تذکر ۶.۳ *در واقع، رابطه (۳.۳) بیان‌گر یک دستگاه معادلات خطی $(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$ است و برای n و m بزرگ باید روش عددی مناسبی برای حل آن در نظر گرفته شود. پیشنهاد می‌شود اگر بُعد دستگاه از ۱۰۰ بیشتر نیست از یک روش مستقیم نظیر روش حذف گاوسی استفاده شود که چون ماتریس ضرایب معین مثبت است!؟ پایداری تضمین شده است و در غیر این صورت از یک روش تکراری مانند روش گاوس–سیدل یا SOR استفاده شود. باید توجه داشت که این روش‌ها برای ابعاد بسیار بالا کارایی ندارند.*

تذکر ۷.۳ *با تغییر برچسب‌گذاری نقاط شبکه به صورت $P_k = (x_i, y_j)$ و مجهولات به شکل $z_k = w_{ij}$ که در آن برای $j = m-1, \dots, 1$ و $i = 1, \dots, n-1$ داریم $k = i + (m-1-j)(n-1)$، یک دستگاه خوش‌شکل نواری با عرض نوار حداکثر $2n-1$ به دست می‌آید. در این برچسب‌گذاری نقاط شبکه به ترتیب از چپ به راست و از بالا به پایین شماره‌گذاری می‌شوند (به شکل ۲.۳ رجوع شود).*

شکل ۲.۳: برچسب‌گذاری گره‌های یک شبکه منظم

مثال ۱.۳ *مسئله تعیین توزیع دمای حالت مانا در یک ورق فلزی نازک مربع شکل با طول ضلع ۰/۵ متر را در نظر بگیرید. دو مرز مجاور در دمای صفر درجه سانتی‌گراد نگه داشته می‌شوند و دما در دو مرز دیگر به طور خطی از صفر تا صد درجه سانتی‌گراد افزایش می‌یابد. اگر ضلع‌های با شرط مرزی صفر در راستای محورهای x و y قرار داده شوند آن‌گاه مسئله به صورت*

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0,$$

روی ناحیه $\Omega = \{(x,y) | 0 < x < 0/5,\ 0 < y < 0/5\}$ همراه با شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(0,y) = 0, \quad u(0/5, y) = 200y, \quad 0 \le y \le 0/5, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x, 0/5) = 200x, \quad 0 \le x \le 0/5, \end{cases}$$

بیان می‌شود. اگر $n = m = 4$ انتخاب شود، شبکه مسئله همانند آن چه در شکل ۳.۳ آمده است خواهد بود و معادله تفاضلی حاکم به صورت

$$4w_{ij} - w_{i-1,j} - w_{i+1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1} = 0, \qquad i,j = 1,2,3,$$

در می‌آید. به کمک برچسب‌گذاری پیشنهاد شده در تذکر ۷.۳ دستگاه معادلات

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \\ z_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

به دست می‌آید که از حل آن خواهیم داشت

k	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
z_k	۱۸٫۷۵	۳۷٫۵۰	۵۶٫۲۵	۱۲٫۵۰	۲۵٫۰۰	۳۷٫۵۰	۶٫۲۵	۱۲٫۵۰	۱۸٫۷۵

این اطلاعات همه دقیق هستند زیرا برای جواب واقعی $u(x,y) = 400xy$ داریم $u_{xxxx} = 0 = u_{yyyy}$ و این یعنی خطای برش موضعی در هر مرحله صفر است. $\triangle$

شکل ۳.۳: شبکه نظیر یک مسئله

تمرین ۱.۳ *مسئله داده شده را به ازای $h = \pi/5$ و $k = \pi/10$ حل نموده با جواب واقعی $u(x,y) = \cos x \cos y$ مقایسه کنید.*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -\cos(x+y) - \cos(x-y), & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi/2, \\ u(0,y) = \cos y, \quad u(\pi,y) = -\cos y, & 0 \le y \le \pi/2, \\ u(x,0) = \cos x, \quad u(x,\pi/2) = 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

۲.۳ معادلات سهموی

معادله دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای سهموی در نظر گرفته شده، معادله گرما یا پخش (انتشار)

$$u_t(x,t)=\alpha^2 u_{xx}(x,t), \qquad 0<x<l, \quad t>0,$$

همراه با شرایط مرزی

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \qquad t\geq 0,$$

و شرط اولیه

$$u(x,0)=f(x), \qquad 0\leq x\leq l,$$

است. به شرط پیوستگی تابع f، این مسئله جواب یکتا دارد. این معادله در مطالعه پدیده‌های انتقالی میرا (تلف شونده) مانند هدایت گرمای غیر مانا، پخش و جریان‌های سیال لزج[۵] کاربرد دارد.
در روش FD، ابتدا عدد صحیح $n>0$ را انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $h=l/n$. سپس اندازه گام زمانی k را انتخاب کرده و نقاط شبکه یعنی (x_i,t_j) برای $i=0,\ldots,n$ و $j=0,1,\ldots$ را به صورت $x_i=ih$ و $t_j=jk$ تعریف می‌کنیم. (به شکل ۴.۳ رجوع شود).

شکل ۴.۳: شبکه‌بندی برای مسئله گرما

برای $i=1,\ldots,n-1$ و $j=0,1,\ldots$ داریم

$$u_t(x_i,t_j)=\alpha^2 u_{xx}(x_i,t_j). \tag{۴.۳}$$

به کمک تقریب تفاضلی پیشروی مشتق مرتبه اول نسبت به متغیر t و تقریب تفاضلی مرکزی مشتق مرتبه دوم نسبت به متغیر x خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\tfrac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{k}-\alpha^2\tfrac{u(x_{i-1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i+1},t_j)}{h^2}\\ &\qquad=\tfrac{k}{2}u_{tt}(x_i,\eta_j)-\alpha^2\tfrac{h^2}{12}u_{xxxx}(\xi_i,t_j)\end{aligned}$$

که در آن ξ_i بین x_{i-1} و x_{i+1} و η_j بین t_j و t_{j+1} قرار دارد. با ساده‌سازی این رابطه و با این فرض که w_{ij} بیان‌گر

[۵] Viscous fluid flows

تقریبی برای $u(x_i,t_j)$ باشد و $r=\alpha^2\frac{k}{h^2}$، برای $i=1,\ldots,n-1$ و $j=0,1,\ldots$ داریم

$$w_{i,j+1}=(1-2r)w_{ij}+r(w_{i-1,j}+w_{i+1,j}). \tag{5.3}$$

برای استفاده از این رابطه، بنابر شرایط مرزی و اولیه، به روابط زیر نیاز خواهیم داشت

$$\begin{cases} w_{0j}=w_{nj}=0, & j=0,1,\ldots,\\ w_{i0}=f(x_i), & i=0,\ldots,n. \end{cases}$$

رابطه (۵.۳) به طرح (معادله) تفاضلی صریح (پیشرو) چهار نقطه‌ای برای معادله گرما معروف است و ثابت می‌شود خطای برش موضعی آن از مرتبه $O(k+h^2)$ است (البته به شرط همواری u به اندازه کافی).

تذکر ۸.۳ *با معرفی ماتریس سه‌قطری*

$$A=\begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ r & 1-2r & r & \ddots & & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & r & 1-2r & r\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & r & 1-2r \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

و بردارهای

$$\begin{cases} W^{(0)}=[f(x_1)\ \cdots\ f(x_{n-1})]^T,\\ W^{(j)}=[w_{1j}\ \cdots\ w_{n-1,j}]^T, \qquad j=1,2,\cdots \end{cases}$$

این طرح به صورت فشرده‌ی $W^{(j)}=AW^{(j-1)}$ در می‌آید.

مثال ۲.۳ *معادله گرمای*

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t), \qquad 0<x<1, \quad t>0,$$

همراه با شرایط مرزی

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad t\geq 0$$

و شرط اولیه

$$u(x,0)=\sin\pi x, \qquad 0\leq x\leq 1,$$

را در نظر بگیرید. این مسئله، جوابی به صورت $u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin\pi x$ دارد. خطای جواب واقعی و جواب طرح تفاضلی صریح چهار نقطه‌ای برای دو حالت $h=0/1$، $k=0/0005$ و $r=0/05$ و $h=0/1$، $k=0/01$ و $r=1$ در زمان $t=0/5$ در جدول ۱.۳ گزارش شده است. △

خطا در حالت $r = ۱$	خطا در حالت $r = ۰/۰۵$	x_i
۰	۰	۰/۰
$۸/۱۹۹ \times ۱۰^{۷}$	$۶/۴۱۱ \times ۱۰^{-۵}$	۰/۱
$۱/۵۵۷ \times ۱۰^{۸}$	$۱/۲۱۹ \times ۱۰^{-۴}$	۰/۲
$۲/۱۳۸ \times ۱۰^{۸}$	$۱/۶۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	۰/۳
$۲/۵۰۶ \times ۱۰^{۸}$	$۱/۹۷۳ \times ۱۰^{-۴}$	۰/۴
$۲/۶۲۷ \times ۱۰^{۸}$	$۲/۰۷۵ \times ۱۰^{-۴}$	۰/۵
$۲/۴۹۰ \times ۱۰^{۸}$	$۱/۹۷۳ \times ۱۰^{-۴}$	۰/۶
$۲/۱۱۲ \times ۱۰^{۸}$	$۱/۶۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	۰/۷
$۱/۵۳۱ \times ۱۰^{۸}$	$۱/۲۱۹ \times ۱۰^{-۴}$	۰/۸
$۸/۰۳۶ \times ۱۰^{۷}$	$۶/۵۱۱ \times ۱۰^{-۵}$	۰/۹
۰	۰	۱/۰

جدول ۱.۳: خطا در طرح تفاضلی صریح چهار نقطه‌ای

به منظور بررسی خطا در دو حالت در نظر گرفته شده در مثال اخیر، باید نگاه دقیق‌تری به روش تفاضلی صریح چهار نقطه‌ای انداخت. فرض کنید $e^{(۰)} = [e_۱^{(۰)} \ \cdots \ e_{n-۱}^{(۰)}]^T$ بیان‌گر خطا در داده‌های آغازی یعنی بردار $W^{(۰)}$ باشد. این خطا در سطح زمانی بعدی به صورت زیر منتشر می‌شود.

$$W^{(۱)} = A(W^{(۰)} + e^{(۰)}) = AW^{(۰)} + Ae^{(۰)}$$

بنابراین خطای ناشی از $e^{(۰)}$ در mاُمین سطح زمانی، به اندازه‌ی $A^m e^{(۰)}$ است. برای آن که با گسترش سطح زمانی، خطای ناشی از $e^{(۰)}$ رشد نکند باید داشته باشیم

$$\left\|A^m e^{(۰)}\right\| \leq \left\|e^{(۰)}\right\|, \qquad \forall m$$

و برای این منظور پس از انتخاب یک نرم ماتریسی سازگار با نرم برداری استفاده شده، کافی است نابرابری زیر برقرار باشد

$$\|A^m\| \leq ۱, \qquad \forall m.$$

این نابرابری (با توجه به مطالبی از جبرخطی عددی) ایجاب می‌کند که

$$\rho(A^m) = (\rho(A))^m \leq ۱, \qquad \forall m.$$

بنابراین شرط لازم و کافی برای آن که در طرح تفاضلی صریح چهار نقطه‌ای خطای داده‌های اولیه در سطوح زمانی بعدی بیش از حد رشد نکند آن است که $\rho(A) \leq ۱$. حال می‌دانیم A یک ماتریس سه قطری است و مقدارهای ویژه

آن از رابطه

$$\lambda_j = ۱ - ۴r\left(\sin\left(\frac{j\pi}{۲n}\right)\right)^۲, \qquad j = ۱, ۲, \dots, n - ۱$$

به دست می‌آیند!؟ پس برای برقراری این شرط، باید داشته باشیم

$$\left|۱ - ۴r\left(\sin\left(\frac{j\pi}{۲n}\right)\right)^۲\right| \leq ۱, \qquad j = ۱, ۲, \dots, n - ۱$$

که دلالت بر آن دارد که

$$۰ \leq r\left(\sin\left(\frac{j\pi}{۲n}\right)\right)^۲ \leq \frac{۱}{۲}, \qquad j = ۱, ۲, \dots, n - ۱$$

و این نابرابری با توجه به کران‌دار بودن تابع $\sin$ به صورت $۰ \leq r \leq \frac{۱}{۲}$ در می‌آید. در نتیجه برای برقراری شرط بیان‌شده باید h و k به گونه‌ای انتخاب شوند که داشته باشیم

$$\alpha^۲ \frac{k}{h^۲} \leq \frac{۱}{۲}. \tag{۶.۳}$$

تذکر ۹.۳ *ثابت می‌شود طرح تفاضلی صریح چهار نقطه‌ای به طور مشروط پایدار است و جواب این روش به جواب مسئله هم‌گرا می‌شود هرگاه شرط (۶.۳) برقرار باشد. البته لازم است تابع u نیز به اندازه‌ی کافی هموار باشد.*

برای به دست آوردن یک طرح تفاضلی که به طور نامشروط پایدار باشد، به کمک تقریب تفاضلی پسرو مشتق مرتبه اول نسبت به متغیر t و تقریب تفاضلی مرکزی مشتق مرتبه دوم نسبت به متغیر x، در رابطه‌ی (۴.۳) خواهیم داشت

$$\frac{u(x_i,t_j)-u(x_i,t_{j-۱})}{k} - \alpha^۲\frac{u(x_{i-۱},t_j)-۲u(x_i,t_j)+u(x_{i+۱},t_j)}{h^۲}$$
$$= -\frac{k}{۲}u_{tt}(x_i,\eta_j) - \alpha^۲\frac{h^۲}{۱۲}u_{xxxx}(\xi_i,t_j)$$

که در آن ξ_i بین $x_{i-۱}$ و $x_{i+۱}$ و η_j بین $t_{j-۱}$ و t_j قرار دارد. با ساده‌سازی این رابطه و با این فرض که w_{ij} بیان‌گر تقریبی برای $u(x_i,t_j)$ باشد، برای $i = ۱, \dots, n-۱$ و $j = ۱, \dots$ داریم

$$-rw_{i-۱,j} + (۱ + ۲r)w_{ij} - rw_{i+۱,j} = w_{i,j-۱}.$$

این رابطه به طرح (معادله‌ی) تفاضلی ضمنی (پسرو) چهار نقطه‌ای برای معادله‌ی گرما معروف است و ثابت می‌شود خطای برش موضعی آن از مرتبه‌ی $O(k + h^۲)$ است (البته به شرط همواری u به اندازه‌ی کافی).

تذکر ۱۰.۳ *با معرفی ماتریس سه‌قطری*

$$A = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -r & 1+2r & -r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

طرح تفاضلی ضمنی چهار نقطه‌ای به صورت فشرده‌ی $AW^{(j)} = W^{(j-1)}$ در می‌آید. به وضوح $W^{(j)}$ با داشتن $W^{(j-1)}$ از حل این دستگاه سه قطری به دست می‌آید. هم‌چنین واضح است که A ماتریسی معین مثبت و قطر غالب اکید بوده و روش‌های کارایی برای حل چنین دستگاه‌هایی موجود است!

مثال ۳.۳ *در مثال قبل حالت $h = 0/1$، $k = 0/01$ و $r = 1$ را در نظر بگیرید. خطای طرح تفاضلی ضمنی چهار نقطه‌ای در زمان $t = 0/5$ در جدول ۲.۳ گزارش شده است که بر خلاف طرح تفاضلی صریح چهار نقطه‌ای، در حد مطلوبی است.* △

x_i	$\lvert w_{i,50} - u(x_i, 0/5)\rvert$
۰/۰	۰
۰/۱	$6/756 \times 10^{-4}$
۰/۲	$1/285 \times 10^{-3}$
۰/۳	$1/769 \times 10^{-3}$
۰/۴	$2/079 \times 10^{-3}$
۰/۵	$2/186 \times 10^{-3}$
۰/۶	$2/079 \times 10^{-3}$
۰/۷	$1/769 \times 10^{-3}$
۰/۸	$1/285 \times 10^{-3}$
۰/۹	$6/756 \times 10^{-4}$
۱/۰	۰

جدول ۲.۳: خطا در طرح تفاضلی ضمنی چهار نقطه‌ای

دلیل آن که طرح تفاضلی ضمنی چهار نقطه‌ای مشکلات پایداری طرح تفاضلی صریح چهار نقطه‌ای را ندارد با بررسی مقدارهای ویژه ماتریس A مشخص می‌شود. مقدارهای ویژه ماتریس سه قطری A عبارتند از

$$\lambda_j = 1 + 4r\sin^2\left(\frac{j\pi}{2n}\right), \qquad j = 1, \ldots, n-1.$$

چون $r > 0$، واضح است که $\lambda_j > 1$. بنابراین A^{-1} موجود است و در نتیجه $W^{(j)} = A^{-1}W^{(j-1)}$. پس خطای $e^{(0)}$ در داده‌های ورودی باعث خطای $(A^{-1})^m e^{(0)}$ در سطح زمانی mاُم می‌شود. چون مقدارهای ویژه A^{-1} عکس مقدارهای ویژه A هستند، پس شعاع طیفی A^{-1} از یک کم‌تر است و در نتیجه بدون توجه به مقدار r روش پایدار خواهد بود.

تذکر ۱۱.۳ *ثابت می‌شود طرح تفاضلی ضمنی چهار نقطه‌ای به طور نامشروط پایدار است و جواب این روش همواره به جواب مسئله هم‌گرا می‌شود. البته لازم است تابع u نیز به اندازه کافی هموار باشد.*

ضعف طرح تفاضلی ضمنی چهار نقطه‌ای آن است که خطای برش موضعی آن نسبت به متغیر زمان از مرتبه $O(k)$ است و این یعنی برای رسیدن به دقت بهتر، باید اندازه گام زمانی را خیلی کوچک انتخاب کرد. منطقی به نظر می‌رسد که به دنبال یک طرح تفاضلی از مرتبه $O(k^2 + h^2)$ باشیم. اولین ترفندی که به نظر می‌رسد آن است که تقریب تفاضلی مرکزی مشتق مرتبه اول نسبت به متغیر t و تقریب تفاضلی مرکزی مشتق مرتبه دوم نسبت به متغیر x را در رابطه (۴.۳) قرار دهیم، یعنی

$$\begin{aligned}\frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_{j-1})}{2k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i-1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i+1},t_j)}{h^2}\\ = -\frac{k^2}{3!}u_{ttt}(x_i,\eta_j) - \alpha^2\frac{h^2}{12}u_{xxxx}(\xi_i,t_j)\end{aligned}$$

که در آن ξ_i بین x_{i-1} و x_{i+1} و η_j بین t_{j-1} و t_{j+1} قرار دارد. با ساده‌سازی این رابطه و با این فرض که w_{ij} بیان‌گر تقریبی برای $u(x_i, t_j)$ باشد، برای $i = 1, \dots, n-1$ و $j = 1, \dots$ داریم

$$w_{i,j+1} - w_{i,j-1} - 2r(w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j}) = 0.$$

این رابطه به طرح (معادله) تفاضلی صریح (سه سطحی) پنج نقطه‌ای ریچاردسون[6] برای معادله گرما معروف است و ثابت می‌شود خطای برش موضعی آن از مرتبه $O(k^2 + h^2)$ است (البته به شرط همواری u به اندازه کافی) ولی متاسفانه مشکلات جدی در پایداری دارد.

تمرین ۲.۳ *مسئله داده‌شده را به ازای $h = 0/2$ و $k = 0/04$ با روش ریچاردسون حل نموده و جواب به دست آمده را در زمان $t = 0/4$ با جواب واقعی $u(x,t) = e^{-t}\sin\frac{\pi}{2}x + e^{-\frac{t}{4}}\sin\frac{\pi}{4}x$ مقایسه کنید.*

$$\begin{cases} u_t - \frac{4}{\pi^2}u_{xx} = 0, & 0 < x < 4, \quad 0 < t,\\ u(0,t) = u(4,t) = 0, & 0 < t,\\ u(x,0) = \sin\frac{\pi}{4}x(1 + 2\cos\frac{\pi}{4}x), & 0 \le x \le 4\end{cases}$$

اما در ادامه ترفند با ارزش‌تری را معرفی می‌کنیم. اگر در طرح تفاضلی پیشرو چهار نقطه‌ای در سطح زمانی j، یعنی

$$\begin{aligned}\frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i-1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i+1},t_j)}{h^2}\\ = \frac{k}{2}u_{tt}(x_i,\eta_j) + O(h^2)\end{aligned}$$

---

[6] Richardson

و طرح تفاضلی پسرو چهار نقطه‌ای در سطح زمانی $j+1$، یعنی

$$\frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{k}-\alpha^2\frac{u(x_{i-1},t_{j+1})-2u(x_i,t_{j+1})+u(x_{i+1},t_{j+1})}{h^2}$$
$$=-\frac{k}{2}u_{tt}(x_i,\zeta_j)+O(h^2)$$

داشته باشیم

$$u_{tt}(x_i,\eta_j)\simeq u_{tt}(x_i,\zeta_j)$$

آن‌گاه یک طرح تفاضلی متوسط به صورت

$$\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j}}{k}-\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{h^2}+\frac{w_{i+1,j+1}-2w_{i,j+1}+w_{i-1,j+1}}{h^2}\right)=0$$

به دست می‌آید که به طرح (معادله) تفاضلی ضمنی شش نقطه‌ای کرانک_نیکلسون[7] برای معادله گرما معروف است و ثابت می‌شود خطای برش موضعی آن از مرتبه $O(k^2+h^2)$ است (البته به شرط همواری u به اندازه کافی).

تذکر ۱۲.۳ *با معرفی ماتریس‌های سه‌قطری*

$$A=\begin{bmatrix}1+r & -\frac{r}{2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & \ddots & & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2}\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r\end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

و

$$B=\begin{bmatrix}1-r & \frac{r}{2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & \ddots & & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2}\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{r}{2} & 1-r\end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

طرح تفاضلی ضمنی کرانک_نیکلسون به صورت فشرده $AW^{(j)}=BW^{(j-1)}$ در می‌آید. به وضوح $W^{(j)}$ با داشتن $W^{(j-1)}$ از حل این دستگاه سه‌قطری به دست می‌آید. هم‌چنین واضح است که A ماتریسی معین مثبت و قطر غالب اکید بوده و می‌توان از روش‌های کارایی مانند تجزیه کروت یا SOR برای حل چنین دستگاه‌هایی سود برد. روش

[7] Crank-Nicolson

x_i	$\lvert w_{i,50} - u(x_i, 0.5)\rvert$
۰/۰	۰
۰/۱	8.271×10^{-5}
۰/۲	1.573×10^{-4}
۰/۳	2.165×10^{-4}
۰/۴	2.546×10^{-4}
۰/۵	2.677×10^{-4}
۰/۶	2.546×10^{-4}
۰/۷	2.165×10^{-4}
۰/۸	1.573×10^{-4}
۰/۹	8.271×10^{-5}
۱/۰	۰

جدول ۳.۳: خطا در طرح تفاضلی کرانک-نیکلسون

کرانک-نیکلسون پایدار نامشروط است و جواب این روش همواره به جواب مسئله هم‌گرا می‌شود[8]. البته لازم است تابع u نیز به اندازه کافی هموار باشد.

مثال ۴.۳ *در مثال قبل حالت $h = 0.1$، $k = 0.01$ و $r = 1$ را در نظر بگیرید. خطای طرح تفاضلی کرانک-نیکلسون در زمان $t = 0.5$ در جدول ۳.۳ گزارش شده است که بهتر از نتایج طرح تفاضلی ضمنی چهار نقطه‌ای است.*
△

تمرین ۳.۳ *مسئله داده‌شده را به ازای $n = 3$ و $k = 0.05$ با روش‌های پسرو و کرانک-نیکلسون حل نموده و جواب به دست آمده را در زمان $t = 0.1$ با جواب واقعی* $u(x,t) = 2e^{-\frac{\pi^2 t}{4}} \sin 2\pi x$ *مقایسه کنید.*

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{16} u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 < t, \\ u(x,0) = 2 \sin 2\pi x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

۳.۳ معادلات هذلولوی

معادله دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای هذلولوی در نظر گرفته شده، معادله موج

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

[8] به کتاب ایساکسون-کلر مراجعه شود.

همراه با شرایط مرزی

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \qquad t\geq 0,$$

و شرایط اولیه

$$u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=g(x) \qquad 0\leq x\leq l,$$

است. به شرط پیوستگی توابع f و g، این مسئله جواب یکتا دارد. این معادله در مطالعه پدیده‌های انتقالی نامیرا (غیر تلف شونده) مانند انتشار نور یا صدا و امواج در اجسام کشسان کاربرد دارد.

در روش FD، ابتدا عدد صحیح $n>0$ را انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $h=l/n$. سپس اندازه گام زمانی k را انتخاب کرده و نقاط شبکه یعنی (x_i,t_j) برای $i=0,\ldots,n$ و $j=0,1,\ldots$ را به صورت $x_i=ih$ و $t_j=jk$ تعریف می‌کنیم (به شکل ۴.۳ رجوع شود). برای $i=1,\ldots,n-1$ و $j=0,1,\ldots$ داریم

$$u_{tt}(x_i,t_j)=\alpha^2u_{xx}(x_i,t_j)$$

به کمک تقریب تفاضلی مرکزی مشتق مرتبه دوم نسبت به متغیر t و تقریب تفاضلی مرکزی مشتق مرتبه دوم نسبت به متغیر x خواهیم داشت

$$\frac{u(x_i,t_{j-1})-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j+1})}{k^2}-\alpha^2\frac{u(x_{i-1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i+1},t_j)}{h^2}$$
$$=\frac{k^2}{12}u_{tttt}(x_i,\eta_j)-\alpha^2\frac{h^2}{12}u_{xxxx}(\xi_i,t_j)$$

که در آن ξ_i بین x_{i-1} و x_{i+1} و η_j بین t_{j-1} و t_{j+1} قرار دارد. با ساده‌سازی این رابطه و با این فرض که w_{ij} بیان‌گر تقریبی برای $u(x_i,t_j)$ باشد و $r=\alpha\frac{k}{h}$، برای $i=1,\ldots,n-1$ و $j=0,1,\ldots$ داریم

$$w_{i,j+1}=2(1-r^2)w_{i,j}+r^2(w_{i-1,j}+w_{i+1,j})-w_{i,j-1}. \tag{۷.۳}$$

برای استفاده از این رابطه، بنابر شرایط مرزی و اولیه، به روابط زیر نیاز خواهیم داشت

$$\begin{cases} w_{0j}=w_{nj}=0, & j=0,1,\ldots,\\ w_{i0}=f(x_i), & i=0,\ldots,n\end{cases}$$

رابطه (۷.۳) به طرح (معادله) تفاضلی صریح پنج نقطه‌ای برای معادله‌ی موج معروف است و ثابت می‌شود خطای برش موضعی آن از مرتبه‌ی $O(k^2+h^2)$ است (البته به شرط همواری u به اندازه کافی).

برای استفاده از رابطه (۷.۳) به ازای $j=0$ مشکلی وجود دارد و آن مقدار $w_{i,-1}$ است. برای رفع این مشکل، از شرط اولیه دیگر داریم

$$u_t(x_i,0)=g(x_i), \qquad i=1,\ldots,n-1.$$

با استفاده از تقریب تفاضلی مرکزی مشتق مرتبه اول نسبت به متغیر t داریم

$$w_{i1} - w_{i,-1} = 2kg(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

حال اگر رابطه (۷.۳) را به ازای $j = 0$ بازنویسی کنیم، خواهیم داشت

$$w_{i1} = 2(1 - r^2)w_{i0} + r^2(w_{i-1,0} + w_{i+1,0}) - w_{i,-1}.$$

با حذف $w_{i,-1}$ در دو رابطه اخیر خواهیم داشت

$$w_{i1} = (1 - r^2)f(x_i) + \frac{r^2}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})) + kg(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n-1. \qquad (8.3)$$

بنابراین برای سطح زمانی اول از رابطه (۸.۳) و برای سطح‌های زمانی بعدی از رابطه (۷.۳) استفاده می‌کنیم.

مثال ۵.۳ *معادله موج*

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

همراه با شرایط مرزی

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

و شرط اولیه

$$u(x,0) = \sin \pi x, \qquad u_t(x,0) = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

را در نظر بگیرید. جواب طرح تفاضلی صریح پنج نقطه‌ای برای $h = 0/1$، $k = 0/05$ و $r = 1$ در زمان $t = 1$ در جدول ۴.۳ گزارش شده است. با توجه به جواب واقعی مسئله یعنی $u(x,t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$ ملاحظه می‌شود که جواب تقریبی تا رقم‌های داده‌شده دقیق است. △

تمرین ۴.۳ *نشان دهید در مثال قبل، تنها خطای تولیدشده، خطای محاسبه w_{i1} و خطای ناشی از گرد کردن است.*

تذکر ۱۳.۳ *ثابت می‌شود طرح تفاضلی صریح پنج نقطه‌ای برای معادله موج، به ازای $r \leq 1$ پایدار است*[9]*. البته روش‌های پایدار نامشروط هم برای معادله موج وجود دارند که ما از طرح آن‌ها در این مقوله خودداری می‌کنیم.*

[9] به کتاب ایساکسون–کلر مراجعه شود.

x_i	جواب تقریبی
۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۰/۱	۰/۳۰۹۰۱۶۹۹۴۴
۰/۲	۰/۵۸۷۷۸۵۲۵۲۳
۰/۳	۰/۸۰۹۰۱۶۹۹۴۴
۰/۴	۰/۹۵۱۰۵۶۵۱۶۳
۰/۵	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۰/۶	۰/۹۵۱۰۵۶۵۱۶۳
۰/۷	۰/۸۰۹۰۱۶۹۹۴۴
۰/۸	۰/۵۸۷۷۸۵۲۵۲۳
۰/۹	۰/۳۰۹۰۱۶۹۹۴۴
۱/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

جدول ۴.۳: جواب تقریبی طرح تفاضلی صریح پنج نقطه‌ای

تمرین‌های اضافی

۱. تقریبی برای جواب معادله با مشتقات پاره‌ای بیضوی زیر با $h = k = \frac{1}{4}$ به دست آورده و با جواب واقعی $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, && 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1, \\ &u(x,0) = 2\ln(x), \quad u(x,1) = \ln(x^2+1), && 1 \le x \le 2, \\ &u(1,y) = \ln(y^2+1), \quad u(2,y) = \ln(y^2+4), && 0 \le y \le 1. \end{aligned}$$

۲. با استفاده از روش پسرو و کرانک-نیکلسون تقریبی برای جواب مسئله زیر به دست آورید.

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = 0, && 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ &u(0,t) = u(2,t) = 0, && t \ge 0, \\ &u(x,0) = \sin \tfrac{\pi}{2} x, && 0 \le x \le 2. \end{aligned}$$

قرار دهید $m = 4$، $T = 0/1$ و $N = 2$ و جواب خود را با جواب واقعی $u(x,t) = e^{-(\pi^2/4)t} \sin \frac{\pi}{2} x$ مقایسه کنید.

۳. با استفاده از روش پیشرو تقریبی برای جواب مسایل زیر به دست آورید.

آ) قرار دهید $h = 0/4$، $k = 0/1$ و جواب خود را در $t = 0/5$ با جواب واقعی $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$

مقایسه کنید. سپس از $h = ۰/۴$ و $k = ۰/۰۵$ استفاده کرده و جواب‌ها را مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = ۰, && ۰ < x < ۲, \quad t > ۰, \\ &u(۰,t) = u(۲,t) = ۰, && t \geq ۰, \\ &u(x,۰) = \sin ۲\pi x, && ۰ \leq x \leq ۲. \end{aligned}$$

ب) قرار دهید $h = \frac{\pi}{۱۰}$، $k = ۰/۰۵$ و جواب خود را در $t = ۰/۵$ با جواب واقعی $u(x,t) = e^{-t}\sin x$ مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = ۰, && ۰ < x < \pi, \quad t > ۰, \\ &u(۰,t) = u(\pi,t) = ۰, && t \geq ۰, \\ &u(x,۰) = \sin x, && ۰ \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

پ) قرار دهید $h = ۰/۱$، $k = ۰/۰۴$ و جواب خود را در $t = ۰/۴$ با جواب واقعی $u(x,t) = e^{-t}\cos \pi(x - \frac{۱}{۲})$ مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} &u_t - \frac{۱}{\pi^۲} u_{xx} = ۰, && ۰ < x < ۱, \quad t > ۰, \\ &u(۰,t) = u(۱,t) = ۰, && t \geq ۰, \\ &u(x,۰) = \cos \pi(x - \tfrac{۱}{۲}), && ۰ \leq x \leq ۱. \end{aligned}$$

۴. با استفاده از روش تفاضلات متناهی تقریبی برای جواب معادله موج زیر به‌دست آورید.

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = ۰, && ۰ < x < \pi, \quad t > ۰, \\ &u(۰,t) = u(\pi,t) = ۰, && t \geq ۰, \\ &u(x,۰) = \sin x, \quad u_t(x,۰) = ۰ && ۰ \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

با انتخاب‌های $h = \frac{\pi}{۱۰}$، $k = ۰/۰۵$، $h = \frac{\pi}{۲۰}$، $k = ۰/۱$ و $h = \frac{\pi}{۲۰}$، $k = ۰/۰۵$ جواب خود را در $t = ۰/۵$ با جواب واقعی $u(x,t) = \cos t \sin x$ مقایسه کنید.

۵. تمرین قبل را با استفاده از $w_{i,۱} = w_{i,۰} + kg(x_i)$ به جای (۸.۳) دنبال کنید.

کتاب‌نامه

[1] G. Birkhoff, G. Rota, Ordinary Differential Equations, (Fourth edition), John Wiley & Sons, New York, USA, 1989.

[2] R. D. Burdan, J. D. Faires, Numerical Analysis, (Ninth edition), Brooks/Cole, Boston, USA, 2011.

[3] J. C. Butcher, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, USA, 2003.

[4] J. C. Butcher, The non-existence of ten-stage eighth-order explicit Runge-Kutta methods, BIT 25(1985), 521-542.

[5] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, (Third edition), Springer-Verlag, New York, USA, 2003.

[6] C. W. Gear, Numerical Initial-Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

[7] E. Issacson, H. B. Keller, Analysis of Numerical Methods, John Wiley & Sons, New York, 1966.

[8] P. Henrici, Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1964.