فصل ۲

ریشه‌یابی (حل معادلات غیرخطی)

هدف از این فصل یافتن ریشه معادله $f(x) = 0$ یا صفر تابع f است، یعنی α را به گونه‌ای می‌یابیم که داشته باشیم $f(\alpha) = 0$. در حالت کلی هیچ روش تحلیلی برای یافتن α زمانی که f یک چندجمله‌ای درجه پنج یا بالاتر باشد وجود ندارد. هم‌چنین برای دسته بزرگی از معادلات که f شامل توابع متعالی باشد یا روش حل تحلیلی موجود نیست یا پیچیده است. به عنوان مثال برای معادلات ساده‌ای مانند $x^5 - x^3 - 1 = 0$ و $x + \cos x = 0$ روش حل تحلیلی وجود ندارد. پس در هر یک از این حالات، روش‌های عددی را به کار گرفته و به کمک آن‌ها جوابی تقریبی برای معادله می‌یابیم.

۱.۲ بررسی کمّی ریشه‌ها

در این بخش قصد داریم وجود و تعداد ریشه‌های یک معادله داده‌شده را مورد بررسی قرار دهیم. در این راستا نه تنها می‌توان از آن دسته از قضایای ریاضیات عمومی که به بررسی رفتار تابع می‌پردازند (قضایای مربوط به اکسترمم‌ها) بهره برد بلکه قضیه بولزانو (حالت خاصی از قضیه مقدار میانی) یک قضیه کلیدی است.

قضیه ۱.۲ **(بولزانو)** *اگر f تابعی پیوسته در $[a, b]$ باشد و $f(a)f(b) < 0$، آن‌گاه معادله $f(x) = 0$ دست کم یک ریشه در (a, b) دارد و اگر f بر $[a, b]$ یکنوا (صعودی یا نزولی اکید) باشد آن ریشه منحصر به فرد است.*

در این راستا با دو مسئله اساسی مواجه هستیم که عبارتند از

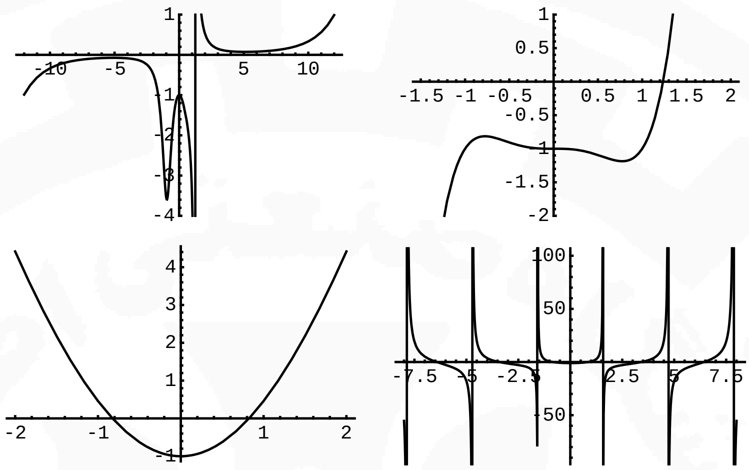
۱. یافتن بازه $[a, b]$ (تا آن جا که ممکن است کوچک) شامل فقط یک ریشه؛

۲. یافتن ریشه با دقت مطلوب.

برای بررسی مورد اول از ابزارهای زیر استفاده می‌کنیم.

- بررسی رفتار تابع (رسم نمودار تابع)؛
- جدول‌بندی مقادیر تابع؛
- تلفیق دو مورد قبل؛
- استفاده از قضایای ریاضی.

مثال ۱.۲ *معادله $3\cosh x - 2\cos x = 0$ ریشه ندارد (شکل ۱.۲ سمت چپ بالا) در حالی که معادله $x - \cos x = 0$ فقط یک ریشه در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ دارد (شکل ۱.۲ سمت راست بالا). همچنین معادله $x^2 - \cos x = 0$ دو ریشه قرینه (شکل ۱.۲ سمت چپ پایین) و معادله $x\tan x - 1 = 0$ بی‌نهایت ریشه مثبت و منفی دارد (شکل ۱.۲ سمت راست پایین).* $\triangle$



شکل ۱.۲: بررسی تعدد ریشه‌ها به کمک رسم

مثال ۲.۲ *با انتخاب a و b مناسب و $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $h = \frac{b-a}{n}$ و با $x_0 = a$ برای $i = 0, \ldots, n$ قرار می‌دهیم $x_i = x_0 + ih$ و جدولی از مقادیر تابع f در نقاط $x_0, \ldots, x_n$ ساخته، سپس از قضیه بولزانو کمک گرفته و از $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$ نتیجه می‌گیریم f دست کم یک ریشه در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ دارد. با انتخاب $a = -10$، $b = 10$ و $n = 10$ جدول ۱.۲ را برای تابع $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ می‌سازیم.*

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
−۱۰	−۹۹۰۰۱	۰	−۱	۱٫۲۰	−۰٫۲۳۹۶۸	۱٫۲۲۰	−۰٫۱۱۳۱۴
−۸	−۳۲۲۵۷	۰٫۲	−۱٫۰۰۷۶۸	۱٫۲۲	−۰٫۱۱۳۱۴	۱٫۲۲۲	−۰٫۰۹۹۸۵۹
−۶	−۷۵۶۱	۰٫۴	−۱٫۰۵۳۷۶	۱٫۲۴	۰٫۰۲۵۰۰۱	۱٫۲۲۴	−۰٫۰۸۶۴۶۱۱
−۴	−۹۶۱	۰٫۶	−۱٫۱۳۸۲۴	۱٫۲۶	۰٫۱۷۵۴۲۱	۱٫۲۲۶	−۰٫۰۷۲۹۴۶
−۲	−۲۵	۰٫۸	−۱٫۱۸۴۳۲	۱٫۲۸	۰٫۳۳۸۸۲۲	۱٫۲۲۸	−۰٫۰۵۹۳۱۳
۰	−۱	۱٫۰	−۱	۱٫۳۰	۰٫۵۱۵۹۳	۱٫۲۳۰	−۰٫۰۴۵۵۶۱۳
۲	۲۳	۱٫۲	−۰٫۲۳۹۶۸	۱٫۳۲	۰٫۷۰۷۴۹۶	۱٫۲۳۲	−۰٫۰۳۱۶۹۰۳
۴	۹۵۹	۱٫۴	۱٫۶۳۴۲۴	۱٫۳۴	۰٫۹۱۴۲۹۶	۱٫۲۳۴	−۰٫۰۱۷۶۹۹۲
۶	۷۵۵۹	۱٫۶	۵٫۳۸۹۷۶	۱٫۳۶	۱٫۱۳۷۶۸۳	۱٫۲۳۶	−۰٫۰۰۳۵۸۷۴
۸	۳۲۲۵۵	۱٫۸	۱۲٫۰۶۳۷۰	۱٫۳۸	۱٫۳۷۶۸۳	۱٫۲۳۸	۰٫۰۱۰۶۴۵۸
۱۰	۹۸۹۹۹	۲٫۰	۲۳٫۰۰۰۰۰	۱٫۴۰	۱٫۶۳۴۲۴	۱٫۲۴۰	۰٫۰۲۵۰۰۱۱

جدول ۱.۲: جدول‌بندی مقادیر تابع $f(x) = x^5 - x^3 - 1$

بنابراین $1.236 \leq \alpha \leq 1.238$ و در نتیجه با دقت $2D$ داریم $\alpha = 1.24$. $\triangle$

تذکر ۱.۲ *روش به کار رفته در مثال اخیر کارایی ندارد.*

مثال ۳.۲ *بدون رسم و جدول‌بندی ثابت می‌کنیم $f(x) = x^{۲} - (۱ - x)^{۵}$ فقط یک ریشه دارد. به کمک آزمون سعی و خطا داریم $f(۰) = -۱$ و $f(۱) = ۱$. پس دست کم یک ریشه در بازه $[۰, ۱]$ موجود است. از طرفی $f'(x) = ۲x + ۵(۱ - x)^{۴}$ و اگر $x \geq ۰$ آن‌گاه $f'(x) > ۰$ و بنابراین f در $[۰, \infty)$ صعودی است. هم‌چنین $f(x) = x^{۵} - ۵x^{۴} + ۱۰x^{۳} - ۹x^{۲} + ۵x - ۱$ و از این که ضرایب توان‌های زوج منفی و ضرایب توان‌های فرد مثبت است نتیجه می‌گیریم که اگر $x < ۰$ آن‌گاه $f(x) < ۰$ و این یعنی f ریشه‌ای در $(-\infty, ۰)$ ندارد.* $\triangle$

۲.۲ دنباله‌های همگرا

بیشتر روش‌های عددی، ساختاری تکراری دارند و به همین دلیل به آن‌ها روش‌های تکراری نیز گفته می‌شود. یک روش تکراری دنباله $\{x_n\}$ را تولید می‌کند که امیدواریم به α (صفر f) همگرا باشد. یک روش همگرا روشی است که دنباله‌ای همگرا به صفر تابع تولید می‌کند. در ادامه این بخش چند اصطلاح مربوط به همگرایی را مرور می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ *فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{\alpha_n\}$ دو دنباله متفاوت باشند. می‌نویسیم*

$$x_n = O(\alpha_n)$$

و می‌خوانیم x_n اُی بزرگ α_n است، هرگاه ثابت‌های $C > ۰$ و $N \in \mathbb{N}$ چنان وجود داشته باشند که

$$|x_n| \leq C\,|\alpha_n|\,, \qquad \forall n \geq N.$$

اگر برای هر n داشته باشیم $\alpha_n \neq ۰$، آن‌گاه می‌توان گفت نسبت $|x_n/\alpha_n|$ کران‌دار (با کران C) باقی می‌ماند هرگاه $n \to \infty$. هر چند که $\{\alpha_n\}$ یک دنباله دلخواه است ولی در عمل، بیشتر مواقع $\alpha_n = \frac{۱}{n^p}$ اختیار می‌شود که در آن $p > ۰$ و در صدد یافتن بزرگ‌ترین مقدار p هستیم به طوری که

$$x_n = O\left(\frac{۱}{n^p}\right).$$

گاهی مواقع می‌نویسیم

$$x_n = o(\alpha_n),$$

و می‌خوانیم x_n اُی کوچک α_n است هرگاه داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = ۰$.

تذکر ۲.۲ *بیشتر مواقع دو دنباله بیان‌شده در تعریف قبل همگرا به صفر هستند و اگر در این صورت داشته باشیم $x_n = O(\alpha_n)$ آن‌گاه می‌توان گفت همگرایی x_n به صفر متناسب با همگرایی α_n به صفر است، در حالی که اگر داشته باشیم $x_n = o(\alpha_n)$، بلافاصله نتیجه می‌گیریم همگرایی x_n به صفر سریعتر از همگرایی α_n به صفر است.*

مثال ۴.۲ *برای* $n \in \mathbb{N}_0$ *فرض کنید*

$$x_n = \frac{n+1}{n^2}, \qquad y_n = \frac{n+1}{n^3}, \qquad z_n = \frac{n^2+1}{n^3}.$$

واضح است که هر سه دنباله به صفر همگرا هستند. به جدول زیر نگاه کنید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰۰
x_n	۲/۰۰۰۰۰	۰/۷۵۰۰۰	۰/۴۴۴۴۴	۰/۳۱۲۵۰	۰/۲۴۰۰۰	۰/۰۱۰۱۰
y_n	۲/۰۰۰۰۰	۰/۳۷۵۰۰	۰/۱۴۸۱۵	۰/۰۷۸۱۳	۰/۰۴۸۰۰	۰/۰۰۰۱۰
z_n	۲/۰۰۰۰۰	۰/۶۲۵۰۰	۰/۳۷۰۳۷	۰/۲۶۵۶۳	۰/۲۰۸۰۰	۰/۰۱۰۰۰

اگر قرار دهیم $\alpha_n = 1/n$ *و* $\beta_n = 1/n^2$ *آن‌گاه*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1.$$

بنابراین

$$x_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad y_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad z_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

هم‌چنین می‌توان نوشت $x_n = O(z_n)$، $z_n = O(x_n)$، $y_n = o(x_n)$ *و* $y_n = o(z_n)$. △

تذکر ۳.۲ *گاهی با فرض* $h = 1/n$ *روابط را بر حسب* h *بررسی می‌کنیم زمانی که* $h \to 0$.

مثال ۵.۲ *به کمک بسط مکلورن خواهیم داشت*

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + - \cdots.$$

بنابراین

$$\cos h - 1 + \frac{h^2}{2} = h^4 \left(\frac{1}{4!} - \frac{h^2}{6!} + \cdots\right),$$

و در نتیجه

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\cos h - 1 + \frac{1}{2}h^2|}{h^4} = \frac{1}{24}.$$

پس $\cos h - 1 + \frac{1}{2}h^2 = O(h^4)$. △

تعریف ۲.۲ *فرض کنید* $\{x_n\}$ *دنباله‌ای همگرا به* x *باشد و برای هر* n *داشته باشیم* $x_n \neq x$. *گوییم این دنباله به طور خطی به* x *همگرا است هرگاه ثابت* $C \in (0,1)$ *چنان وجود داشته باشد که*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|} = C.$$

در این حالت C به نرخ همگرایی[۱] معروف است. برای $C = ۰$ ($C = ۱$) همگرایی زیرخطی[۲] (زیرخطی[۳]) نامیده می‌شود. اگر اعداد مثبت و ثابت C و $p > ۱$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+۱} - x|}{|x_n - x|^p} = C$$

آن‌گاه گوییم مرتبه همگرایی[۴] این دنباله p است. C به ثابت خطای مجانبی[۵] معروف است. اگر $p = ۲$ ($p = ۳$) همگرایی مربعی (مکعبی) نامیده می‌شود ($C < ۱$ لزومی ندارد).

مثال ۶.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای با همگرایی خطی به صفر با

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+۱}|}{|x_n|} = ۰/۵,$$

و $\{y_n\}$ دنباله‌ای با همگرایی مربعی به صفر با همان ثابت خطای مجانبی باشد یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|y_{n+۱}|}{|y_n|^۲} = ۰/۵.$$

برای سادگی فرض می‌کنیم برای $n \geq N$ داریم

$$\frac{|x_{n+۱}|}{|x_n|} \simeq ۰/۵, \qquad \frac{|y_{n+۱}|}{|y_n|^۲} \simeq ۰/۵.$$

بنابراین می‌توان نوشت

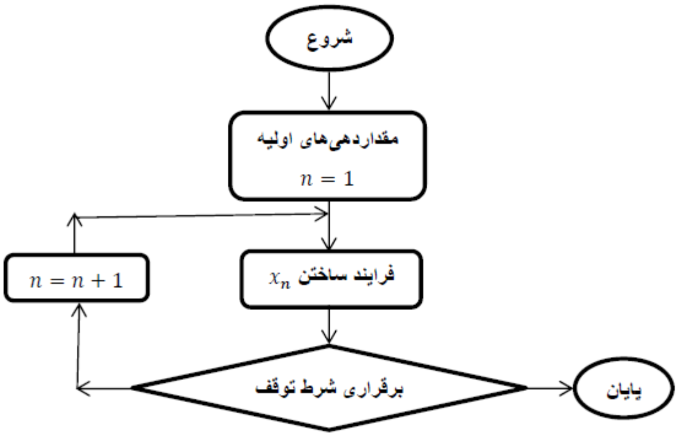
$$\begin{aligned}
|x_n - ۰| = |x_n| &\simeq ۰/۵\,|x_{n-۱}| \simeq (۰/۵)^۲\,|x_{n-۲}| \simeq \cdots \simeq (۰/۵)^n\,|x_۰|\,,\\
|y_n - ۰| = |y_n| &\simeq ۰/۵\,|y_{n-۱}|^۲ \simeq (۰/۵)(۰/۵\,|y_{n-۲}|^۲)^۲ = (۰/۵)^۳\,|y_{n-۲}|^۴\\
&\simeq (۰/۵)^۳(۰/۵\,|y_{n-۳}|^۲)^۴ = (۰/۵)^۷\,|y_{n-۳}|^۸\\
&\simeq \cdots \simeq (۰/۵)^{۲^n-۱}\,|y_۰|^{۲^n}.
\end{aligned}$$

△

مثال ۷.۲ دنباله $a_n = \frac{۱}{۲n}$ با نرخ همگرایی $\frac{۱}{۲}$، همگرایی خطی به صفر دارد. همگرایی دنباله $b_n = \frac{۱}{۲^{۲^n}}$ به صفر زیرخطی است. در اصل همگرایی این دنباله مربعی است. دنباله $c_n = \frac{۱}{n+۱}$ همگرایی زیرخطی به صفر دارد. △

---

[۱] rate of convergence
[۲] superlinear
[۳] sublinear
[۴] order of convergence
[۵] asymptotic error constant



شکل ۲.۲: طرح کلی روش‌های تکراری

۳.۲ روش‌های عددی

برای برخورد با دومین مشکل اساسی مطرح‌شده در ابتدای فصل، به بررسی روش‌های عددی می‌پردازیم. همان‌طور که در طرح کلی روش‌های تکراری آمده در شکل ۲.۲ مشاهده می‌شود یک گام اساسی در این روش‌ها شرط توقف است که برای مسئله ریشه‌یابی انواع آن عبارتند از

۱) $|x_n - \alpha| < \epsilon$؛

۲) $|f(x_n)| < \epsilon$؛

۳) $|x_n - x_{n-۱}| < \epsilon$؛

۴) $\frac{|x_n - x_{n-۱}|}{|x_n|} < \epsilon$ (زمانی که ریشه خیلی کوچک یا بزرگ باشد)؛

۵) تعیین بیش‌ترین تعداد تکرار؛

۶) تلفیق موارد قبل؛

۷) استفاده از کران بالای خطا[۶].

تذکر ۴.۲ *در عمل چون به α دسترسی نداریم کمتر از اولین مورد استفاده می‌کنیم و اگر کران بالای خطا در دسترس باشد، مطمئن‌ترین شرط توقف است.*

تذکر ۵.۲ *برقراری $|f(x_n)| < \epsilon$ برقراری $|x_n - \alpha| < \epsilon$ را تضمین نمی‌کند. به عنوان مثال، صفر تابع $f(x) = \tan^{-۱} x - ۱/۵۵$ با دقت $۳D$ عبارت است از $۴۸/۰۷۹$ (رادیان). از طرفی داریم $f(۵۰) \simeq ۸ \times ۱۰^{-۴}$ در حالی که $۵۰ - ۴۸/۰۷۹ = ۱/۹۲۱$.*

[۶] Upper error bound

تذکر ۶.۲ *اگر $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$ برقرار باشد لزومی ندارد $|x_n - \alpha| < \epsilon$ برقرار باشد زیرا اگر $\lim x_n = \alpha$ آن‌گاه $\lim |x_n - x_{n-1}| = 0$ ولی عکس این مطلب درست نیست. به عنوان نمونه دنباله $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ واگرا است حال آن که داریم $|x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{n}$.*

۱.۳.۲ روش دوبخشی

روش دوبخشی[7] به روش نصف کردن، تنصیف و نیم‌سازی نیز شهرت دارد. ایده اصلی این روش آن است که، پس از حصول اطمینان از وجود ریشه منحصر به فرد در بازه $[a,b]$، بازه را نصف کرده و (به کمک قضیه بولزانو) نیم‌بازه‌ای که ریشه در آن وجود ندارد را کنار گذاشته و این فرایند را تکرار می‌کنیم. به شکل ۳.۲ نگاه کنید.

شکل ۳.۲: بررسی روش دوبخشی به کمک رسم

الگوریتم روش دوبخشی

- **ورودی.** a, b, f (با این فرض که تابع f در بازه $[a,b]$ صفر یکتا داشته باشد)
- **خروجی.** تقریبی از صفر تابع f

۱) قرار دهید $x = \frac{a+b}{2}$

۲) اگر شرط توقف (یک یا چند شرط توقف بیان‌شده) برقرار باشد a، b و x را چاپ کرده و متوقف شوید

۳) اگر $f(a)f(x) < 0$ قرار دهید $b = x$ و به گام ۱ برگردید

۴) قرار دهید $a = x$ و به گام ۱ برگردید

مثال ۸.۲ *معادله $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ ریشه‌ای یکتا در بازه $[1,2]$ دارد. زیرا $f(1) = -5$، $f(2) = 14$ و برای $x \in [1,2]$ داریم $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$. با اِعمال روش دوبخشی، جدول ۲.۲ به دست می‌آید. پس از ۱۳ تکرار $x_{13} = 1.365112305$، α را با خطایی به اندازه*

$$|\alpha - x_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070,$$

تقریب می‌زند. چون $|a_{14}| < |\alpha|$، از

$$\delta(x_{13}) = \frac{|\alpha - x_{13}|}{|\alpha|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \leq 0.9 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-3},$$

[7] Bisection method

نتیجه می‌شود x_{13} دست کم سه رقم بامعنای درست دارد. ممکن است از رابطه $|f(x_9)| < |f(x_{13})|$ گمان کنیم x_9 بهتر از x_{13}، α را تقریب می‌زند ولی چون از α اطلاعی نداریم معلوم نیست آیا رابطه $|\alpha - x_9| < |\alpha - x_{13}|$ برقرار است یا نه! $\triangle$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
۱	۱/۰	۲/۰	۱/۵	۲/۳۷۵
۲	۱/۰	۱/۵	۱/۲۵	−۱/۷۹۶۸۷
۳	۱/۲۵	۱/۵	۱/۳۷۵	۰/۱۶۲۱۱
۴	۱/۲۵	۱/۳۷۵	۱/۳۱۲۵	−۰/۸۴۸۳۹
۵	۱/۳۱۲۵	۱/۳۷۵	۱/۳۴۳۷۵	−۰/۳۵۰۹۸
۶	۱/۳۴۳۷۵	۱/۳۷۵	۱/۳۵۹۳۷۵	−۰/۰۹۶۴۱
۷	۱/۳۵۹۳۷۵	۱/۳۷۵	۱/۳۶۷۱۸۷۵	۰/۰۳۲۳۶
۸	۱/۳۵۹۳۷۵	۱/۳۶۷۱۸۷۵	۱/۳۶۳۲۸۱۲۵	−۰/۰۳۲۱۵
۹	۱/۳۶۳۲۸۱۲۵	۱/۳۶۷۱۸۷۵	۱/۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۰/۰۰۰۰۷۲
۱۰	۱/۳۶۳۲۸۱۲۵	۱/۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۱/۳۶۴۲۵۷۸۱۳	−۰/۰۱۶۰۵
۱۱	۱/۳۶۴۲۵۷۸۱۳	۱/۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۱/۳۶۴۷۴۶۰۹۴	−۰/۰۰۷۹۹
۱۲	۱/۳۶۴۷۴۶۰۹۴	۱/۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۱/۳۶۴۹۹۰۲۳۵	−۰/۰۰۳۹۶
۱۳	۱/۳۶۴۹۹۰۲۳۵	۱/۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۱/۳۶۵۱۱۲۳۰۵	−۰/۰۰۱۹۴

جدول ۲.۲: روش دوبخشی برای معادله $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

تذکر ۷.۲ *روش دوبخشی برای یافتن ریشه چندگانه (با چندگانگی زوج) کارایی ندارد.*

قضیه ۲.۲ *اگر $f \in C[a,b]$ و $f(a)f(b) < 0$ آن‌گاه روش دوبخشی دنباله $\{x_n\}_{n\geq 1}$ را تولید می‌کند که به α (صفر f) همگرا است[8] و داریم*

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}, \qquad n \geq 1.$$

تذکر ۸.۲ می‌توان نوشت $x_n = \alpha + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ *یعنی همگرایی دنباله $\{x_n\}_{n\geq 1}$ به α متناسب با همگرایی $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\geq 1}$ به صفر خواهد بود و چون* $0{,}001 < \frac{1}{1024} = 2^{-10}$ *می‌توان گفت پس از ۱۰ تکرار، بیشتر از سه رقم به ارقام بامعنای درست اضافه نمی‌شود و این نشان می‌دهد که همگرایی روش دوبخشی کند است.*

تمرین ۱.۲ *چند تکرار روش دوبخشی لازم است تا ریشه ساده و یکتای $f(x) = 0$ در بازه $[a,b]$ با دقت rD به دست آید؟*

[8] $f \in C[a,b]$ یعنی تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته است.

مثال ۹.۲ *در ریاضیات مالی ثابت می‌شود اگر یک وام A تومانی با نرخ بهره ماهانه x در n قسط ماهانه به مبلغ P تومان مستهلک شود، رابطه $A = \frac{P}{x}(۱ - (۱ + x)^{-n})$ برقرار خواهد بود. اگر شخصی یک وام مسکن سی ساله به مبلغ ۱۲۱۵۰۰۰۰۰ تومان نیاز داشته باشد و قادر به پرداخت اقساط ماهانه ۹۰۰۰۰۰ تومان باشد حداکثر نرخ بهره‌ای که می‌تواند بپذیرد را با به کار بردن روش دوبخشی و با دقت $۴D$ تعیین کنید.*
باید x را به قسمی تعیین کنیم که

$$۱۲۱۵۰۰۰۰۰ = \frac{۹۰۰۰۰۰}{x}(۱ - (۱ + x)^{-۳۰\times ۱۲}),$$

به عبارت دیگر باید صفر تابع $f(x) = ۱۳۵ + \frac{(۱ + x)^{-۳۶۰} - ۱}{x}$ مشخص شود. برای این منظور اگر $a = ۰/۰۰۶۰۰$ و $b = ۰/۰۰۸۰۰$ انتخاب شود از $f(a) = -۱۲/۳۲۱۳۶$ و $f(b) = ۱۷/۰۹۷۷۱$ نتیجه می‌گیریم دست کم یک ریشه در بازه $[۰/۰۰۶۰۰, ۰/۰۰۸۰۰]$ وجود دارد. با یک بررسی ساده مشخص می‌شود این ریشه منحصر به فرد است!؟ از طرفی از نابرابری $\frac{۰/۰۰۸۰۰ - ۰/۰۰۶۰۰}{۲^n} < ۰/۵ \times ۱۰^{-۴}$ در می‌یابیم کمترین تعداد تکرار لازم برای رسیدن به دقت مطلوب، $n = ۶$ خواهد بود. از سطر آخر جدول ۳.۲ نتیجه می‌گیریم $۰/۰۰۶۷۲ < \alpha < ۰/۰۰۶۷۵$ و بنابراین با دقت $۴D$ خواهیم داشت $x \simeq ۰/۰۰۶۷$. تقریب بهتر، $۰/۰۰۶۷۴۹۹۲$ است و علت تفاوت محسوس دو مقدار $f(۰/۰۰۶۷) \simeq -۰/۷۶۷۱۹$ و $f(۰/۰۰۶۷۴۹۹۲) \simeq ۴ \times ۱۰^{-۵}$ تنها کم بودن تعداد ارقام بامعنای $۰/۰۰۶۷$ است.
$\triangle$

n	a	b	$x = \frac{a+b}{۲}$	$f(x)$
۱	۰/۰۰۶۰۰	۰/۰۰۸۰۰	۰/۰۰۷۰۰	۳/۷۳۸۴۴
۲	۰/۰۰۶۰۰	۰/۰۰۷۰۰	۰/۰۰۶۵۰	−۳/۹۱۳۸۷
۳	۰/۰۰۶۵۰	۰/۰۰۷۰۰	۰/۰۰۶۷۵	۰/۰۰۱۲۷
۴	۰/۰۰۶۵۰	۰/۰۰۶۷۵	۰/۰۰۶۶۳	−۱/۸۵۵۱۵
۵	۰/۰۰۶۶۳	۰/۰۰۶۷۵	۰/۰۰۶۶۹	−۰/۹۲۱۷۵
۶	۰/۰۰۶۶۹	۰/۰۰۶۷۵	۰/۰۰۶۷۲	−۰/۴۵۸۹۵

جدول ۳.۲: نتایج روش دوبخشی برای مثال ۹.۲

۲.۳.۲ روش نابجایی

در روش نابجایی[۹] مانند روش دوبخشی پس از حصول اطمینان از وجود ریشه منحصر به فرد در بازه $[a, b]$، بازه را به دو زیربازه تقسیم کرده و زیربازه‌ای که ریشه در آن وجود ندارد را کنار گذاشته و این فرایند را تکرار می‌کنیم. به شکل ۴.۲ نگاه کنید.

الگوریتم روش نابجایی

- **ورودی.** a, b, f (با این فرض که تابع f در بازه $[a, b]$ صفر یکتا داشته باشد)
- **خروجی.** تقریبی از صفر تابع f

[۹] Method of false position (regula falsi)

۱) قرار دهید $x = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

۲) اگر شرط توقف (یک یا چند شرط توقف بیان‌شده) برقرار باشد a، b و x را چاپ کرده و متوقف شوید

۳) اگر $f(a)f(x) < ۰$ قرار دهید $b = x$ و به گام ۱ برگردید

۴) قرار دهید $a = x$ و به گام ۱ برگردید

شکل ۴.۲: بررسی روش نابجایی به کمک رسم

مثال ۱۰.۲ *روش نابجایی در حل معادله* $f(x) = x^۳ + ۴x^۲ - ۱۰ = ۰$ *بر بازه* $[۱,۲]$ *نتایج جدول ۴.۲ را تولید می‌کند که با توجه به اختلاف* $x_۸$ *و* $x_۹$ *نتیجه می‌گیریم با دقت* $۴D$ *صفر تابع عبارت است از* $x \simeq ۱/۳۶۵۲$. △

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
۱	۱/۰	۲/۰	۱/۲۶۳۱۶	−۱/۶۰۲۲۷
۲	۱/۲۶۳۱۶	۲/۰	۱/۳۳۸۸۳	−۰/۴۳۰۳۷
۳	۱/۳۳۸۸۳	۲/۰	۱/۳۵۸۵۵	−۰/۱۱۰۰۱
۴	۱/۳۵۸۵۵	۲/۰	۱/۳۶۳۵۵	−۰/۰۲۷۷۶
۵	۱/۳۶۳۵۵	۲/۰	۱/۳۶۴۸۱	−۰/۰۰۶۹۸
۶	۱/۳۶۴۸۱	۲/۰	۱/۳۶۵۱۲	−۰/۰۰۱۷۶
۷	۱/۳۶۵۱۲	۲/۰	۱/۳۶۵۲۰	−۰/۰۰۰۴۴
۸	۱/۳۶۵۲۰	۲/۰	۱/۳۶۵۲۲	−۰/۰۰۰۱۱
۹	۱/۳۶۵۲۲	۲/۰	۱/۳۶۵۲۳	−۰/۰۰۰۰۳

جدول ۴.۲: روش نابجایی برای معادله $x^۳ + ۴x^۲ - ۱۰ = ۰$

تذکر ۹.۲ *روش نابجایی مانند روش دوبخشی همگرایی تضمین شده‌ای دارد و با آن که حجم عملیات آن حدود دو برابر روش دوبخشی است، بعضی مواقع سریع‌تر است. ولی ممکن است اکثر یا تمام عناصر دنباله* $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ *در یک طرف ریشه* (α) *قرار بگیرند (مانند مثال اخیر) که در این حالت همگرایی روش نابجایی ممکن است از روش دوبخشی نیز کندتر باشد. در این صورت یا از روش‌های دیگر استفاده می‌شود و یا اگر بعد از دو تکرار* a *یا* b *تغییر مکان نداد باید در محاسبات* $\frac{f(a)}{۲}$ *یا* $\frac{f(b)}{۲}$ *با* $f(a)$ *یا* $f(b)$ *جایگزین شده و تکرارها دنبال شوند*[۱۰].

[۱۰] روش نابجایی اصلاح‌شده یا تغییریافته

۳.۳.۲ روش تکرار ساده

روش تکرار ساده[۱۱] که به روش تکرار نقطه ثابت[۱۲] و هم‌چنین روش تکرار تابعی[۱۳] نیز مشهور است، ایده ساده‌ای دارد که در ادامه آورده می‌شود. ابتدا معادله $f(x) = ۰$ را به صورت $x = g(x)$ به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که اگر $f(\alpha) = ۰$ آن‌گاه $\alpha = g(\alpha)$. سپس به جای یافتن صفر تابع f، نقطه ثابت تابع g را جستجو می‌کنیم.

تعریف ۳.۲ *برای تابع $y = f(x)$ نقطه $z \in D_f$ را نقطه ثابت نامیم هرگاه $z = f(z)$ (محل برخورد نمودار f با نیمساز ناحیه اول و سوم).*

تذکر ۱۰.۲ *لزومی ندارد همه ریشه‌های $f(x) = ۰$، نقطه ثابت g باشند و بر عکس ممکن است همه نقاط ثابت g، ریشه $f(x) = ۰$ نباشند. به عنوان مثال $f_۱(x) = \sqrt{x} - ۲\cos x$ یک صفر در $[۱, ۲]$ و $f_۲(x) = \sqrt{x} + ۲\cos x$ یک صفر در $[۲, ۳]$ و یک صفر در $[۳, ۴]$ دارد و اگر $x = g(x) := ۴\cos^۲ x$ آن‌گاه g سه نقطه ثابت در $[۱, ۲]$، $[۲, ۳]$ و $[۳, ۴]$ دارد. هم‌چنین $f(x) = x^۲ + x - ۱$ دو صفر در $[۰, ۱]$ و $[-۲, -۱]$ دارد و $g_۱(x) = \sqrt{۱ - x}$ یک نقطه ثابت در $[۰, ۱]$ و $g_۲(x) = -\sqrt{۱ - x}$ یک نقطه ثابت در $[-۲, -۱]$ دارد.*

قضیه ۳.۲ (نقطه ثابت) *آ) اگر $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ و $g \in C[a, b]$ آن‌گاه g در $[a, b]$ حداقل یک نقطه ثابت دارد؛*

ب) هم‌چنین اگر g' بر (a, b) موجود باشد و عدد ثابت و مثبت L چنان وجود داشته باشد که

$$\forall\, x \in (a, b), \qquad |g'(x)| \le L < ۱,$$

آن‌گاه نقطه ثابت g در $[a, b]$ یکتا است؛

پ) به علاوه دنباله $\{x_n\}_{n\ge ۱}$ تولیدشده توسط فرایند $x_n = g(x_{n-۱})$ به ازای هر $x_۰$ در $[a, b]$ به نقطه ثابت g همگرا است و داریم

$$|x_n - \alpha| \le \frac{L^n}{۱ - L}|x_۱ - x_۰|.$$

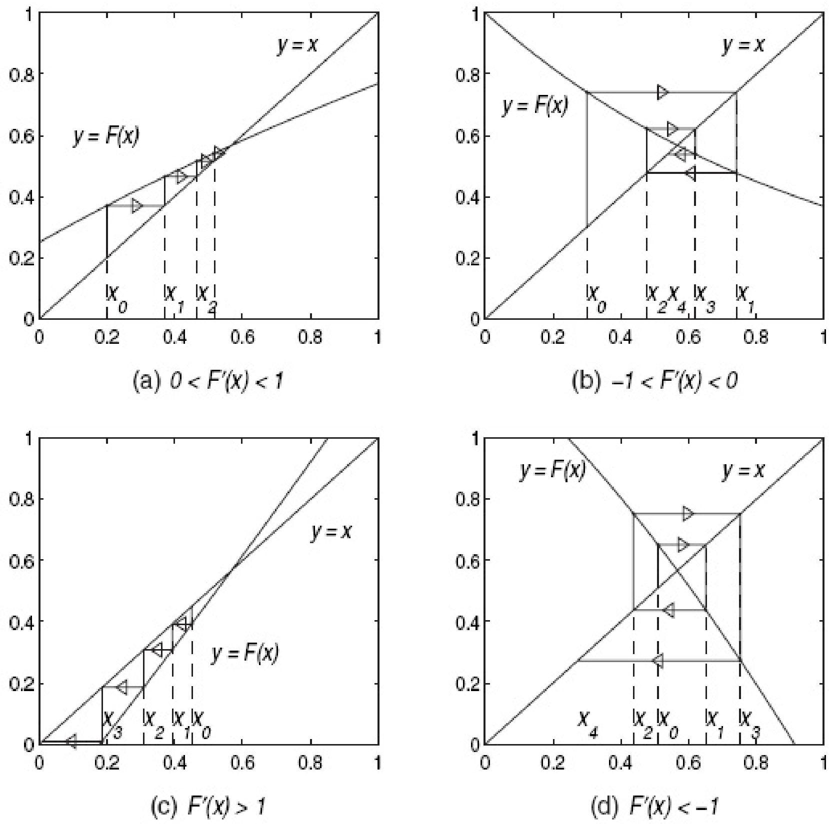
اگر شرایط قضیه نقطه ثابت برقرار باشد بلافاصله نتایج زیر به دست می‌آیند.

نتیجه ۱.۳.۲ $|x_n - \alpha| \le L^n \max\{x_۰ - a, b - x_۰\}$.

نتیجه ۲.۳.۲ *اگر به ازای هر x در (a, b) داشته باشیم $۰ < g'(x) \le L < ۱$، آن‌گاه دنباله تولیدشده توسط روش تکرار ساده یعنی $\{x_n\}_{n\ge ۱}$ یکنوا است و اگر به ازای هر x در (a, b) داشته باشیم $-۱ < -L \le g'(x) < ۰$، آن‌گاه عناصر متوالی دنباله تولیدشده توسط روش تکرار ساده در دو طرف α قرار می‌گیرند.*

با توجه به کران خطا، هر چه L به صفر نزدیک‌تر باشد همگرایی سریع‌تر و هر چه L به یک نزدیک‌تر باشد همگرایی کندتر خواهد بود. در شکل ۵.۲ نمونه‌هایی از همگرایی یا واگرایی روش تکرار ساده آورده شده است.

[۱۱] Simple iteration
[۱۲] Fixed point iteration
[۱۳] Functional iteration



شکل ۵.۲: تعبیر هندسی روش تکرار ساده

الگوریتم روش تکرار ساده

- **ورودی.** $x_۰, \epsilon, g$ (با این فرض که تابع g در فرضیات قضیه نقطه ثابت صدق کند)
- **خروجی.** مقدار x_n که به ازای آن $|x_n - x_{n-۱}| < \epsilon$

۱) قرار دهید $n = ۱$

۲) قرار دهید $x_n = g(x_{n-۱})$

۳) اگر $|x_n - x_{n-۱}| < \epsilon$ آن‌گاه x_n را چاپ کرده و متوقف شوید

۴) قرار دهید $n = n + ۱$ و به گام ۲ برگردید

مثال ۱۱.۲ *تابع $f(x) = x^{۳} - x^{۲} + ۱$ روی بازه $I = [-۱, -۰/۵]$ مفروض است. نشان دهید روش تکراری $x_n = x_{n-۱} - \frac{۱}{۶} f(x_{n-۱}),\ n = ۱, ۲, \ldots$ برای هر $x_۰$ متعلق به بازه I به صفر تابع f در این بازه همگرا است و این ریشه را با استفاده از این روش تکرار ساده با نقطه شروع $x_۰ = -۰/۷$ و با دقت $۳D$ به دست آورید.*

از این‌که $g(x) = x - \frac{۱}{۶} f(x) = -\frac{۱}{۶}x^{۳} + \frac{۱}{۶}x^{۲} + x - \frac{۱}{۶}$ پس $g'(x) = -\frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۳}x + ۱$ و از $g'(x) = ۰$ نتیجه می‌شود $x_۱ = \frac{۱-\sqrt{۱۹}}{۳} \simeq -۱/۱۲۰$ و $x_۲ = \frac{۱+\sqrt{۱۹}}{۳} \simeq ۱/۷۸۶$ و چون $I \subset [x_۱, x_۲]$ بنابراین برای هر $x \in I$ داریم $g'(x) > ۰$، یعنی تابع g بر I صعودی اکید است. از طرفی $g(-۱) = -\frac{۵}{۶}$ و $g(-۰/۵) = -\frac{۲۹}{۴۸}$ پس

$$g : [-۱, -۰/۵] \to [-\frac{۵}{۶}, -\frac{۲۹}{۴۸}] \subset [-۱, -۰/۵].$$

هم‌چنین داریم

$$-۱ < x < -\frac{۱}{۲} \;\Rightarrow\; -\frac{۴}{۳} < x - \frac{۱}{۳} < -\frac{۵}{۶} \Rightarrow\; \frac{۲۵}{۳۶} < (x-\frac{۱}{۳})^۲ < \frac{۱۶}{۹} \Rightarrow\; \frac{۱}{۶} < -\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۳})^۲ + \frac{۱۹}{۱۸} < \frac{۱۷}{۲۴}$$

و چون $g'(x) = -\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۳})^۲ + \frac{۱۹}{۱۸}$ *پس* $\forall x \in (-۱, -۰٫۵),\; |g'(x)| < \frac{۱۷}{۲۴}$. *بنابراین شرایط قضیه نقطه ثابت برقرار است. با توجه به مقادیر* x_n *گزارش‌شده در جدول ۵.۲ در می‌یابیم که* $\alpha = -۰٫۷۵۵(۳D)$.

n	۱	۲	۳	۴	۵
x_n	$-۰٫۷۲۷۸$	$-۰٫۷۴۱۹$	$-۰٫۷۴۸۸$	$-۰٫۷۵۲۰$	$-۰٫۷۵۳۶$
n	۶	۷	۸	۹	۱۰
x_n	$-۰٫۷۵۴۳$	$-۰٫۷۵۴۶$	$-۰٫۷۵۴۷$	$-۰٫۷۵۴۸$	$-۰٫۷۵۴۸$

جدول ۵.۲: نتایج روش تکرار ساده برای مثال ۱۱.۲

باید توجه داشت که با $L = \frac{۱۷}{۲۴}$ *و* $x_۰ = -۰٫۷$*، از کران خطای*

$$\frac{L^n}{۱-L}|x_۱ - x_۰| \le ۰٫۵ \times ۱۰^{-۳},$$

خواهیم داشت $n \ge ۱۶$*. چرا در عمل با تعداد تکرار کمتری جواب مطلوب به دست آمده است؟* $\triangle$

تذکر ۱۱.۲ *در حالت کلی بهتر است کران‌های g و g' را با بررسی رفتار آنها (محاسبه اکسترمم‌ها) به دست آوردیم زیرا ممکن است در استفاده از نامساوی‌ها مرتکب اشتباه شویم و کران‌های بدبینانه‌ای به دست آوریم.*

مثال ۱۲.۲ *تقریبی از بزرگترین ریشه معادله* $۲x - \ln x - ۴ = ۰$ *را با دقت* $۴D$ *به دست آورید.*
همان طور که در شکل ۶.۲ مشاهده می‌شود این معادله دو ریشه به ترتیب در بازه‌های $[۰,۱]$ *و* $[۲,۳]$ *دارد.*

شکل ۶.۲: نمودار توابع $\ln x$ و $۲x - ۴$

با انتخاب $g(x) = ۲ + \frac{۱}{۲}\ln x$ *داریم* $g'(x) = \frac{۱}{۲x}$*. چون* g' *در بازه* $[۲,۳]$ *مثبت است پس* g *در این بازه صعودی است و بنابراین*

$$۲ < g(۲) = ۲ + \frac{۱}{۲}\ln ۲ \le g(x) \le g(۳) = ۲ + \frac{۱}{۲}\ln ۳ < ۳, \qquad \forall x \in [۲,۳],$$

یعنی تابع g *به وضوح پیوسته بوده و بازه* $[۲,۳]$ *را به توی بازه* $[۲,۳]$ *می‌برد. از طرف دیگر چون در این بازه داریم*

$g''(x) = \frac{-۱}{۲x^۲} < ۰$، بنابراین g' در این بازه نزولی بوده و

$$g'(۳) = \frac{۱}{۶} < g'(x) < g'(۲) = \frac{۱}{۴}, \qquad \forall x \in (۲, ۳),$$

و در نتیجه $L = \frac{۱}{۴}$. بنابراین شرایط قضیه نقطه ثابت برقرار است و از نابرابری

$$\frac{L^n}{۱ - L} |g(x_۰) - x_۰| \leq ۰/۵ \times ۱۰^{-۴},$$

به ازای $x_۰ = ۲/۵$ داریم $n \geq ۶$.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
x_n	۲/۴۵۸۱۵	۲/۴۴۹۷۰	۲/۴۴۷۹۸	۲/۴۴۷۶۳	۲/۴۴۷۵۶	۲/۴۴۷۵۵	۲/۴۴۷۵۴	۲/۴۴۷۵۴

جدول ۶.۲: نتایج روش تکرار ساده برای مثال ۱۲.۲

نتایج جدول ۶.۲ حاکی از آن است که $\alpha = ۲/۴۴۷۵(۴D)$. چرا در تکرار هفتم به نقطه ثابت رسیده‌ایم؟ △

تذکر ۱۲.۲ در پاسخ به پرسش‌های پایانی در دو مثال ۱۱.۲ و ۱۲.۲ باید گفت این اتفاق‌ها ناشی از رشد خطای گرد کردن است. بنابراین توصیه می‌شود در عمل تکرارها را تا جایی ادامه دهیم که ثابت شوند.

قضیه ۴.۲ اگر $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای باشد که توسط روش تکرار ساده به دست آمده باشد و به α (نقطه ثابت g) همگرا باشد و

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(p-۱)}(\alpha) = ۰ \neq g^{(p)}(\alpha),$$

آن‌گاه مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ برابر p است.

مثال ۱۳.۲ دنباله $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند

$$x_{n+۱} = \frac{x_n(x_n^۲ + ۳a)}{۳x_n^۲ + a}, \qquad n \geq ۰,$$

که در آن $a > ۰$. حد دنباله و مرتبه همگرایی دنباله به حد آن را به دست آورید.
فرض کنید $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. با حدگیری داریم

$$\alpha = \frac{\alpha(\alpha^۲ + ۳a)}{۳\alpha^۲ + a},$$

و از آنجا $۲\alpha(\alpha^۲ - a) = ۰$ و بنابراین $\alpha = ۰, \pm\sqrt{a}$. با معرفی

$$g(x) = \frac{x(x^۲ + ۳a)}{۳x^۲ + a},$$

خواهیم داشت

$$g'(x) = \frac{۳x^۴ - ۶ax^۲ + ۳a^۲}{(۳x^۲ + a)^۲}, \qquad g''(x) = \frac{۴۸ax(x^۲ - a)}{(۳x^۲ + a)^۳}, \qquad g'''(x) = \frac{۴۸a(-۹x^۴ + ۱۸ax^۲ - a^۲)}{(۳x^۲ + a)^۴}.$$

چون $g'(۰) \neq ۰$ مرتبه همگرایی دنباله به صفر، یک است. از طرفی بنابر

$$g'(\pm\sqrt{a}) = g''(\pm\sqrt{a}) = ۰ \neq \frac{۳}{۲a} = g'''(\pm\sqrt{a}),$$

نتیجه می‌گیریم مرتبه همگرایی دنباله به $\pm\sqrt{a}$، سه است. △

تذکر ۱۳.۲ *اگر بتوان تابع g را به گونه‌ای انتخاب نمود که $g'(\alpha)$ صفر شود، بنابر قضیه ۴.۲، می‌توان انتظار همگرایی سریع‌تری داشت. به همین منظور فرض کنید g چنان انتخاب شده است که $g(\alpha) = \alpha$. با فرض $\lambda \neq ۰$ قرار دهید $x + \lambda x = g(x) + \lambda x$ و از آن جا $x = \frac{g(x)+\lambda x}{۱+\lambda}$. قرار دهید $g_\lambda(x) = \frac{g(x)+\lambda x}{۱+\lambda}$. حال λ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $g'_\lambda(\alpha) = ۰$. اما $g'_\lambda(x) = \frac{g'(x)+\lambda}{۱+\lambda}$ پس باید داشته باشیم $\lambda = -g'(\alpha)$. ولی از α همین قدر اطلاع داریم که $\alpha \in [a, b]$. پس با این فرض که $b - a$ کوچک باشد آن‌گاه $\alpha \simeq \frac{a+b}{۲}$ (یک تکرار از روش دوبخشی) و قرار می‌دهیم $\lambda = -g'(\frac{a+b}{۲})$.*

مثال ۱۴.۲ *تقریبی از ریشه $x - \tan(x) = ۰$ به دست آورید که به $\frac{۳\pi}{۲}$ نزدیک باشد.*
با انتخاب $x = \tan(x) = g(x)$ واضح است که $g'(x) = ۱ + \tan^۲(x) > ۱$، یعنی g شرایط قضیه نقطه ثابت را ندارد. اگر روش تکراری $x_n = g(x_{n-۱})$ را با $x_۰ = ۴/۵$ دنبال کنیم خواهیم داشت

$$x_۱ = ۴/۶۴, \qquad x_۲ = ۱۳/۷۹, \qquad x_۳ = ۲/۷۶, \qquad x_۴ = -۰/۴.$$

حال با فرض $a = ۴/۴$ و $b = ۴/۶$ خواهیم داشت $\alpha \simeq ۴/۵$ و قرار می‌دهیم $\lambda = -g'(۴/۵) = -۲۲/۵$ بنابراین $g_\lambda(x) = \frac{\tan(x)-۲۲/۵x}{-۲۱/۵}$. روش تکراری $x_n = g_\lambda(x_{n-۱})$ با $x_۰ = ۴/۵$، نتایج $x_۱ = ۴/۴۹۳۶$ و $x_i = ۴/۴۹۳۴$ برای $i = ۲, ۳, \ldots$ را تولید می‌کند. △

تمرین ۲.۲ *در مثال قبل $g(x) = \tan^{-۱}(x)$ را بررسی کنید.*

تذکر ۱۴.۲ *فرض کنید تابع g با ویژگی‌های زیر در دسترس باشد.*

- g بر $[a, b]$ پیوسته باشد؛
- $g : [a, b] \to [a, b]$ یک به یک و پوشا باشد و یا $g : [a, b] \subset [c, d] \to [c, d]$؛
- g بر (a, b) مشتق‌پذیر بوده و $K > ۱$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $|g'(x)| \geq K$.

اگر بتوان ضابطه $g^{-۱}$ را به دست آورد و قرار دهیم $G(x) = g^{-۱}(x)$ آن‌گاه واضح است که از $\alpha = g(\alpha)$ خواهیم داشت $\alpha = G(\alpha)$ و

- G بر $[a,b]$ (یا (c,d)) پیوسته است و این بازه را به توی خود می‌نگارد؛
- G بر (a,b) (یا (c,d)) مشتق‌پذیر بوده و داریم

$$\forall x \ : \ |G'(x)| = \frac{۱}{|g'(G(x))|} \leq \frac{۱}{K} < ۱.$$

یعنی G در شرایط قضیه نقطه ثابت صادق است و دنباله تولیدشده با $x_{n+۱} = G(x_n)$ به ازای هر $x_۰$ در $[a,b]$ به α همگرا می‌شود.

مثال ۱۵.۲ معادله $x^۳ + x - ۹۹۵ = ۰$ را با دقت $۹D$ حل کنید.

تنها ریشه معادله در فاصله $[۹/۹, ۱۰]$ قرار دارد. اگر معادله را به صورت هم‌ارز آن $x = ۹۹۵ - x^۳$ بنویسیم آن‌گاه تابع $g(x) = ۹۹۵ - x^۳$ در شرایط قضیه نقطه ثابت صدق نمی‌کند. داریم $g([۹/۹, ۱۰]) = [-۵, ۲۴/۷۰۱] \subseteq [۹/۹, ۱۰]$ و چون $|g'(x)| = ۳x^۲$ پس روی $[۹/۹, ۱۰]$ داریم $|g'(x)| \geq ۳ \times (۹/۹)^۲ = ۲۹۴/۰۳$. از طرفی واضح است که $g^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{۹۹۵ - x}$، $g^{-۱}([۹/۹, ۱۰]) \subseteq [۹/۹, ۱۰]$ و $|(g^{-۱})'(x)| \leq \frac{۱}{۲۹۴/۰۳} = L$. بنابراین شرایط قضیه نقطه ثابت برای $g^{-۱}$ برقرار است. به ازای $x_۰ = ۱۰$ با دقت $۱۰D$ داریم $x_1 = 9/9497478956$. تعداد گام‌های لازم n از رابطه $\frac{L^n}{۱ - L}|x_۱ - x_۰| < ۰/۵ \times ۱۰^{-۹}$ به دست می‌آید. از حل این نابرابری نتیجه می‌شود $n \geq ۴$. در جدول ۷.۲ چند جمله از دنباله تولیدشده به کمک $g^{-۱}$ با مقدار آغازی $x_۰ = ۱۰$ و خطای تقریب داده شده است. بنابراین جواب معادله $f(x) = ۰$ با دقت $۹D$ عدد $x = ۹/۹۴۹۹۱۶۵۲۸$ است. △

n	۱	۲	۳	۴
$x_n = g^{-۱}(x_{n-۱})$	۹/۹۴۹۷۴۷۸۹۵۶	۹/۹۴۹۹۱۷۰۹۶۰	۹/۹۴۹۹۱۶۵۲۶۳	۹/۹۴۹۹۱۶۵۲۸۳
$\left\|\frac{x_n - x_{n-۱}}{x_n}\right\|$	۰/۰۵۰۲۵۲۱۰۴۴	۰/۰۰۰۱۶۸۶۳۲۶	۰/۰۰۰۰۰۰۵۶۷۸	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲

جدول ۷.۲: نتایج روش تکرار ساده برای مثال ۱۵.۲

۴.۳.۲ روش نیوتن

این روش به روش نیوتن-رفسون[۱۴] و روش مماسی نیز معروف است. برای به دست آوردن طرح تکراری این روش، فرض کنید[۱۵] $f \in C^۲[a,b]$ و $x_۰$ تقریبی از α باشد به طوری که $f'(x_۰) \neq ۰$. با انتخاب $h = \alpha - x_۰$، بنا بر بسط تیلور خواهیم داشت

$$f(\alpha) = f(x_۰ + h) = f(x_۰) + hf'(x_۰) + \frac{h^۲}{۲!}f''(y),$$

که در آن y بین α و $x_۰$ است. اگر h کوچک باشد، $h^۲ = (\alpha - x_۰)^۲$ قابل چشم‌پوشی بوده و داریم

$$۰ = f(\alpha) \simeq f(x_۰) + (\alpha - x_۰)f'(x_۰),$$

[۱۴] Newton-Raphson

[۱۵] $f \in C^۲[a,b]$ یعنی تابع f و مشتق اول و دوم آن بر بازه $[a,b]$ پیوسته هستند.

که نتیجه می‌دهد

$$\alpha \simeq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} := x_1,$$

و با تکرار این فرایند خواهیم داشت

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

یک راه دیگر برای به دست آوردن طرح تکراری روش نیوتن استفاده از تعبیر هندسی روش است که در شکل ۷.۲ آورده شده است.

شکل ۷.۲: تعبیر هندسی روش نیوتن

الگوریتم روش نیوتن

- **ورودی.** x_0, ϵ, f با این فرض که x_0 به α نزدیک باشد
- **خروجی.** مقدار x_n که به ازای آن $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$

۱) قرار دهید $n = 1$

۲) قرار دهید $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

۳) اگر $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$، x_n را چاپ کرده و متوقف شوید

۴) قرار دهید $n = n + 1$ و به گام ۲ برگردید

تذکر ۱۵.۲ *با انتخاب $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ملاحظه می‌شود که، روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است.*

مثال ۱۶.۲ *می‌خواهیم نقطه ثابت تابع کسینوس را تعیین کنیم. به کمک رسم، متوجه می‌شویم، نقطه ثابت تابع در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ قرار دارد. با انتخاب $x_0 = \frac{\pi}{4}$ و استفاده از طرح تکرار ساده $x_{n+1} = \cos x_n$، نتایج جدول ۸.۲ (سمت چپ) به دست می‌آید که دلالت بر مقدار تقریبی ۰/۷۴ دارد. اما با انتخاب $f(x) = \cos x - x$ و $x_0 = \frac{\pi}{4}$ و با دنبال کردن طرح تکراری نیوتن یعنی*

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\cos x_{n-1} - x_{n-1}}{-\sin x_{n-1} - 1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

نتایج جدول ۸.۲ (سمت راست) تولید می‌شود که دلالت بر آن دارد که نقطه ثابت تابع کسینوس با دقت $9D$ عبارت است از ۰/۷۳۹۰۸۵۱۳۳. $\triangle$

n	x_n
۰	۰٫۷۸۵۳۹۸۱۶۳۵
۱	۰٫۷۳۹۵۳۶۱۳۳۷
۲	۰٫۷۳۹۰۸۵۱۷۸۱
۳	۰٫۷۳۹۰۸۵۱۳۳۲
۴	۰٫۷۳۹۰۸۵۱۳۳۲

n	x_n
۰	۰٫۷۸۵۳۹۸۱۶۳۵
۱	۰٫۷۰۷۱۰۶۷۸۱۰
۲	۰٫۷۶۰۲۴۴۵۹۷۲
۳	۰٫۷۲۴۶۶۷۴۸۰۸
۴	۰٫۷۴۸۷۱۹۸۸۵۸
۵	۰٫۷۳۲۵۶۰۸۴۴۶
۶	۰٫۷۴۳۴۶۴۲۱۱۳
۷	۰٫۷۳۶۱۲۸۲۵۶۵

جدول ۸.۲: تقریب‌هایی برای یافتن نقطه ثابت تابع کسینوس

مثال ۱۷.۲ *ثابت می‌شود یکی از مدل‌های رشد جمعیت یک جامعه، تابعی بر حسب زمان t به صورت زیر است*

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1),$$

که در آن N_0 جمعیت آغازی، ν میزان مهاجرت (که ثابت فرض می‌شود) و λ بیانگر ثابت نرخ تولد است. فرض کنید جمعیت آغازی یک جامعه ۱۰۰۰۰۰۰ نفر بوده و در سال اول ۴۳۵۰۰۰ نفر مهاجر داشته باشد. اگر در انتهای سال اول جمعیت جامعه ۱۵۶۴۰۰۰ نفر شده باشد، ثابت نرخ تولد در این جامعه را مشخص کنید. سپس با استفاده از آن و با این فرض که میزان مهاجرت در سال دوم تغییر نکند، جمعیت جامعه را در پایان سال دوم پیش‌بینی کنید.

در واقع باید جواب معادله $1564000 = 1000000 e^{\lambda} + \frac{435000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$ را به دست آوریم. به عبارت دیگر باید صفر تابع $f(\lambda) = 1000 e^{\lambda} + \frac{435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1564$ معین شود. برای این منظور از روش نیوتن استفاده می‌کنیم و جوابی به دست می‌آوریم که دارای دقت $6D$ باشد. بنابراین با منظور نمودن دقت $7D$ و به ازای $\lambda_0 = 1$، به کمک رابطه بازگشتی

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{f(\lambda_n)}{f'(\lambda_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

به نتایج جدول ۹.۲ دست می‌یابیم. دلیل توقف در تکرار پنجم آن است که

$$|\lambda_5 - \lambda_4| = 0{,}0000002 < 0{,}5 \times 10^{-6}.$$

در این صورت $\lambda = 0{,}100998$ و جمعیت در انتهای سال دوم عبارت است از

$$N(2) = 1000000 e^{2\times 0{,}100998} + \frac{435000}{0{,}100998}(e^{2\times 0{,}100998} - 1) = 2187939.$$

اگر محاسبات میانی با دقت $3D$ انجام شود، $\lambda = 0{,}07$ خواهد بود و جمعیت در انتهای سال دوم $N(2) = 2084120$ به دست می‌آید که با مقدار قبلی بیش از ۱۰۰۰۰۰ نفر (حدود ۵ درصد) تفاوت دارد. توجه داشته باشید اگر بخواهیم بر مبنای جمعیت در انتهای سال دوم تخصیص بودجه داشته باشیم این اختلاف می‌تواند خیلی از موازنه‌ها را بر هم زند.

توجه داشته باشید که به ازای $\lambda = ۰/۰۷$ خواهیم داشت $N(۱) = ۱۵۲۳۰۹۳$، در حالی که به ازای $\lambda = ۰/۱۰۰۹۹۸$ مقدار واقعی $N(۱) = ۱۵۶۴۰۰۰$ به دست می‌آید. △

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵
λ_n	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۳۹۶۹۰۳۱	۰/۱۳۸۸۶۹۰	۰/۱۰۱۶۶۶۶	۰/۱۰۰۹۹۸۱	۰/۱۰۰۹۹۷۹

جدول ۹.۲: روش نیوتن در یافتن ثابت نرخ تولد

قضیه ۵.۲ *فرض کنید $f \in C^۲[a,b]$ و $\alpha \in [a,b]$ صفر ساده f باشد یعنی $f(\alpha) = ۰ \neq f'(\alpha)$. در این صورت δیی مثبت موجود است که دنباله حاصل از روش نیوتن به ازای هر $x_۰$ در $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ به α همگرا است.*

تذکر ۱۶.۲ *از قضیه ۵.۲ چنین نتیجه‌گیری می‌شود که برای تضمین همگرایی روش نیوتن باید $x_۰$ به α نزدیک باشد. به همین منظور در عمل ابتدا چند تکرار یک روش ساده (با حجم عملیات کم) مانند روش دوبخشی را دنبال کرده و نتیجه را به عنوان $x_۰$ روش نیوتن اختیار می‌کنیم.*

قضیه ۶.۲ *تحت شرایط قضیه ۵.۲ مرتبه همگرایی روش نیوتن دست کم ۲ است.*

برهان. روش نیوتن را به عنوان یک روش تکرار ساده در نظر گرفته، با فرض $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ خواهیم داشت $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^۲(x)}$ و در نتیجه $g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'^۲(\alpha)} = ۰$. هم‌چنین $g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ و بنابر قضیه ۴.۲ مرتبه همگرایی روش نیوتن در این حالت کمتر از دو نیست. □

تمرین ۳.۲ *نشان دهید مرتبه همگرایی روش نیوتن در یافتن ریشه $\alpha = ۰$ معادله $\sin x = ۰$ دقیقا ۳ است.*

مثال ۱۸.۲ *می‌خواهیم $\sqrt[m]{a}$ را با روش نیوتن تعیین کنیم که در آن a و m اعدادی مثبت هستند. به همین منظور تابع $f(x) = x^m - a$ را تعریف می‌کنیم که $\alpha = \sqrt[m]{a}$ صفر آن است. طرح تکراری نیوتن به صورت زیر در می‌آید*

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{x_n^m - a}{mx_n^{m-۱}} = \frac{(m-۱)x_n^m + a}{mx_n^{m-۱}}, \qquad n = ۰, ۱, \ldots.$$

اگر $m = ۲$ و $a = ۲$ اختیار شود، این طرح به صورت $x_{n+۱} = \frac{x_n}{۲} + \frac{۱}{x_n}$ خلاصه می‌شود و نتایج

$$x_۱ = ۱/۵,\ x_۲ = ۱/۴۱۶۶۶۶۶۶۷,\ x_۳ = ۱/۴۱۴۲۱۵۶۸۶,\ x_۴ = ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲,\ x_۵ = ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲$$

به ازای $x_۰ = ۱$ تولید می‌شود. △

مثال ۱۹.۲ *با استفاده از روش نیوتن یک طرح تکراری برای محاسبه وارون عدد ناصفر a به دست آورده و به کمک آن تقریبی برای $\frac{۱}{۳}$ تعیین کنید.*

اگر $f(x) = \frac{۱}{x} - a$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{-۱}{x^۲}$ و از آنجا داریم

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{۱}{x_n} - a}{\frac{-۱}{x_n^۲}},$$

و در نتیجه $x_{n+1} = x_n(۲ - ax_n)$. *با فرض* $a = ۳$ و $x_۰ = ۰/۳$ *خواهیم داشت* $x_۱ = ۰/۳۳$، $x_۲ = ۰/۳۳۳۳$ و $x_۳ = ۰/۳۳۳۳۳۳۳۳$. △

تعریف ۴.۲ *α صفر چندگانه f از مرتبه تکرار $m > ۱$ نامیده می‌شود هرگاه*

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(m-۱)}(\alpha) = ۰ \neq f^{(m)}(\alpha),$$

و یا بتوان نوشت $f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$ *که در آن* $h(\alpha) \neq ۰$.

قضیه ۷.۲ *اگر α صفر m-گانه f باشد، آن‌گاه مرتبه همگرایی روش نیوتن یک و نرخ همگرایی آن* $۱ - \frac{۱}{m}$ *است.*

قضیه ۸.۲ *روش* $x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ *که به روش نیوتن تعمیم‌یافته (ترمیم‌یافته، تغییریافته، اصلاح‌شده) معروف است، برای یافتن صفر m-گانه f، مرتبه همگرایی حداقل دو دارد.*

مثال ۲۰.۲ *$\alpha = ۰$ صفر مرتبه چهارم* $f(x) = ۲\cos x - ۲ + x^۲$ *است زیرا*

$$f'(x) = -۲\sin x + ۲x, \qquad f''(x) = -۲\cos x + ۲, \qquad f'''(x) = ۲\sin x, \qquad f^{(۴)}(x) = ۲\cos x,$$

و به وضوح $f(۰) = f'(۰) = f''(۰) = f'''(۰) = ۰ \neq f^{(۴)}(۰)$. *هم‌چنین به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت*

$$f(x) = ۲\cos x - ۲ + x^۲ = x^۴\left(\frac{۲}{۴!} - \frac{۲x^۲}{۶!} + \cdots\right).$$

با به کاربردن روش نیوتن به ازای $x_۰ = ۰/۰۱$ *خواهیم داشت* $x_{۱۲} = ۰/۰۰۰۴۲۴۳۴۱$ *که نشان‌دهنده همگرایی کند روش است. اگر روش*

$$x_{n+1} = x_n - ۴\frac{۲\cos x_n - ۲ + x_n^۲}{-۲\sin x_n + ۲x_n},$$

را به کار بریم، به ازای $x_۰ = ۰/۰۱$ *خواهیم داشت* $x_۲ = -۰/۱۶۳۲۰۶ \times ۱۰^{-۷}$، *اما برای محاسبه* $x_۳$ *صورت و مخرج کسر صفر می‌شود (چون ریشه چندگانه است).* △

قضیه ۹.۲ *اگر α صفر m-گانه f باشد، آن‌گاه α صفر ساده* $f^{(m-۱)}$ *بوده و روش* $x_{n+1} = x_n - \frac{f^{(m-۱)}(x_n)}{f^{(m)}(x_n)}$، *دنباله‌ای تولید می‌کند که با مرتبه همگرایی دست کم دو به α همگرا است.*

برهان. روش نیوتن برای یافتن ریشه ساده معادله $f^{(m-۱)}(x) = ۰$، دارای مرتبه همگرایی دست کم دو است. □

مثال ۲۱.۲ *$\alpha = ۰$ صفر مرتبه چهارم* $f(x) = ۲\cos x - ۲ + x^۲$ *و صفر ساده* $f'''(x) = ۲\sin x$ *است. بنابراین طرح تکراری*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'''(x_n)}{f^{(۴)}(x_n)} = x_n - \frac{۲\sin x_n}{۲\cos x_n} = x_n - \tan x_n,$$

به ازای $x_۰ = ۰/۰۱$ *نتیجه می‌دهد* $x_۱ = -۰/۳۳۳۳۴۷ \times ۱۰^{-۶}$، $x_۲ = ۰/۱۲۳۳۴۹ \times ۱۰^{-۱۹}$ و $x_۳ = ۰/۰$. △

تذکر ۱۷.۲ *در به کار بردن روش نیوتن دو مشکل اساسی وجود دارد که عبارتند از*

- *x_0 باید نزدیک α اختیار شود؛*
- *وجود، محاسبه و مخالف صفر بودن $f'(x_n)$.*

برای درک بهتر به شکل ۸.۲ نگاه کنید.

شکل ۸.۲: تعبیر هندسی مشکلات اساسی روش نیوتن

۵.۳.۲ روش وتری

روش وتری به روش خط قاطع[16] نیز معروف است و برای رفع مشکل دوم روش نیوتن مطرح شده است. با توجه به رابطه

$$f'(x_n) = \lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x},$$

اگر x به اندازه کافی به x_n نزدیک باشد به عنوان مثال $x = x_{n-1}$، می‌توان نوشت

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

با جای‌گذاری در طرح تکراری نیوتن، برای $n \geq 1$ داریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

یک راه دیگر به دست آوردن طرح تکراری روش وتری، استفاده از تعبیر هندسی روش است که در شکل ۹.۲ آورده شده است.

شکل ۹.۲: تعبیر هندسی روش وتری

[16] Secant method

الگوریتم روش وتری

- **ورودی.** x_0, x_1, ϵ, f
- **خروجی.** مقدار x_{n+1} که به ازای آن $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$

۱) قرار دهید $n = 1$

۲) قرار دهید $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

۳) اگر $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ آن‌گاه x_{n+1} را چاپ کرده و متوقف شوید

۴) قرار دهید $n = n + 1$ و به گام ۲ برگردید

مثال ۲.۲۲ *همان طور که بررسی شد $\alpha = 0$ صفر مرتبه چهار $f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$ است. با به کاربردن روش وتری به ازای $x_0 = 0/01$ و $x_1 = 0/002$ خواهیم داشت $x_{10} = 0/000381888$.* △

تذکر ۲.۱۸ *ثابت می‌شود مرتبه همگرایی روش وتری $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1/618$ است.*

تذکر ۲.۱۹ *روش وتری برای شروع به دو مقدار آغازی نیاز دارد که لزومی ندارد دو طرف α واقع باشند؛ ولی روش نابجایی برای شروع به a و bیی نیاز دارد که $f(a)f(b) < 0$. هم‌چنین در روش وتری همیشه نقطه‌ای با کوچک‌ترین اندیس کنار گذاشته می‌شود ولی در روش نابجایی ممکن است یک نقطه در چند تکرار متوالی ثابت بماند.*

تمرین

---

۱. درستی روابط زیر را بررسی کنید

$$\frac{1}{n\ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \sin h = h - \frac{h^3}{6} + O(h^5), \qquad e^{-n} = o(1/n^2).$$

۲. ابتدا نشان دهید معادله $x^2 - 4\sin x = 0$ فقط یک ریشه در بازه $[1, 2]$ دارد. سپس برای آن که تقریبی از این ریشه با دقت $3D$ به دست آید به چند بار نصف کردن نیاز است؟ در پایان ریشه را با این دقت تعیین کنید.

۳. با شروع از بازه $[0, 5]$، روش دوبخشی به کدام صفر تابع $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2(x-4)$ همگرا می‌شود؟

۴. برای محاسبه ریشه مثبت معادله $x^2 + x - 1 = 0$، می‌توان توابع زیر را در نظر گرفت

$$x = g_1(x) := 1 - x^2, \quad x = g_2(x) := \sqrt{1-x}, \quad x = g_3(x) := \frac{1}{1+x}, \quad x = g_4(x) := \frac{x^2+1}{2x+1}.$$

به کمک قضیه نقطه ثابت نشان دهید g_1 مناسب نیست و به ترتیب g_4، g_3 و g_2 مناسب‌تر هستند.

۵. برای مثال ۱۲.۲، آیا تابع $g(x) = e^{2x-4}$ در شرایط قضیه نقطه ثابت صدق می‌کند؟

۶. یک طرح تکراری برای یافتن صفر مرتبه دو تابع $f(x) = 1 - e^{x^2}$ با مرتبه همگرایی دو به دست آورید.

۷. برای یافتن ریشه $x = 0$ معادله $x + x^3 - \sin(x) = 0$ کدام دنباله مرتبه همگرایی بزرگتری دارد؟

الف) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ب) $x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ج) $x_{n+1} = x_n - 3\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ د) $x_{n+1} = \sin(x_n) - x_n^3$

۸. یک طرح تکراری برای تعیین $\sqrt[3]{2}$ به کمک روش نیوتن بسازید.

۹. کدام گزینه نادرست است؟

الف) روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است که همگرایی تضمین شده‌ای دارد.

ب) در یافتن ریشه‌های مضاعف یک تابع مرتبه همگرایی روش نیوتن دو نیست.

ج) اگر $g'(\alpha) = 0$ آنگاه مرتبه همگرایی روش تکرار ساده حداقل دو است.

د) روش وتری لزوما همگرا نیست.

۱۰. کدام بازه $[a,b]$ این خاصیت را دارد که "دنباله حاصل از روش تکرار ساده $x_{n+1} = 0/3(x_n - 0/1)^3 - 0/2$ برای هر $x_0 \in [a,b]$ به $\alpha \in [a,b]$ همگرا است"؟

الف) $[1, 1/5]$ ب) $[-2, -1]$ ج) $[-0/5, 0]$ د) $[2, 2/5]$

۱۱. اگر $x_{n+1} = \frac{4}{5}\cos(x_n)$ با $x_0 = 1$ به $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ همگرا باشد، حداکثر مقدار $|x_{10} - \alpha|$ کدام است؟

الف) $0/1974$ ب) $0/1074$ ج) $0/2148$ د) $0/3048$

۱۲. اگر بخواهیم جواب معادله $\sin(x) - \cos(x) = 0/1$ را با $x_0 = 0/8$ و $x_1 = 1$، به روش وتری حل کنیم x_3 کدام گزینه است؟ الف) $0/856166112$ ب) $0/856143999$ ج) $0/856629456$ د) $0/856236990$

۱۳. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

الف) روش نیوتن برای حل معادلات غیرخطی همیشه همگرا است.

ب) روش دوبخشی برای یافتن تمام ریشه‌ها همگرا است.

ج) مرتبه همگرایی روش نیوتن به مرتبه ریشه بستگی دارد.

د) مرتبه همگرایی روش وتری بیشتر از مرتبه همگرایی روش نیوتن است.

۱۴. اگر از روش دوبخشی برای محاسبه ریشه مثبت معادله $3xe^x = 1$ در بازه $[0, 1]$ با دقت $0/5 \times 10^{-4}$ استفاده شود، حداقل چند تکرار از روش دوبخشی لازم است؟

الف) ۱۴ ب) ۱۵ ج) ۱۹ د) ۱۷

۱۵. مرتبه همگرایی روش نیوتن برای پیدا کردن ریشه‌های $f(x) = x^4 - 2x^2 = 0$ در صورتی که به ریشه همگرا شود، چند است؟

الف) برای همه ریشه‌ها خطی است.

ب) برای همه ریشه‌ها از مرتبه دو است.

ج) برای ریشه‌ی صفر از مرتبه دو و برای ریشه‌های ناصفر خطی است.

د) برای ریشه‌ی صفر خطی است و برای ریشه‌های ناصفر از مرتبه دو است.

۱۶. طرح تکراری $x_{n+۱} = \frac{۲}{۳}\left(x_n + \frac{۱}{x_n^۲}\right)$ با

الف) مرتبه همگرایی دو به $\sqrt[۳]{۲}$ همگرا است. ب) مرتبه همگرایی حداقل دو به $\sqrt[۳]{۲}$ همگرا است.

ج) مرتبه همگرایی دو به $\sqrt{۲}$ همگرا است. د) مرتبه همگرایی حداقل دو به $\sqrt{۲}$ همگرا است.

۱۷. فرض کنید $f(x) = x + \cos x$ و $x_۰ = ۰$ و $x_۱ = ۰٫۵$ باشد. مقدار $x_۲$ در روش وتری کدام است؟

الف) $-۱٫۴۲۳۲$ ب) $۱٫۳۲۴۲$ ج) $۱٫۴۲۳۲$ د) $-۱٫۳۲۴۲$

۱۸. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد ریشه $\alpha = ۰$ برای $f(x) = \sin x - \sinh x$ صحیح است؟

الف) روش نیوتن همگرای مرتبه دو است. ب) روش دوبخشی همگرا نیست.

ج) روش نیوتن همگرای مرتبه یک است. د) روش نیوتن همگرای حداقل مرتبه دو است.

۱۹. کدام گزینه درست است؟

الف) معادله $x = ۱ + \tan^{-۱} x$ نقطه ثابت یکتا در بازه $[۲, ۳]$ دارد.

ب) تابع $g(x) = ۱ + \tan^{-۱} x$ ریشه یکتا در بازه $[۲, ۳]$ دارد.

ج) تابع $g(x) = ۱ + \tan^{-۱} x$ نقطه ثابت یکتا در بازه $[۲, ۳]$ دارد.

د) معادله $x = ۱ + \tan x$ ریشه یکتا در بازه $[۲, ۳]$ دارد.

۲۰. با این فرض که $f(x) = \cos(e^x)$، $x_۰ = ۰$، $x_۱$ با روش نیوتن و $x_۲$ با روش وتری به دست آید، $x_۱$ و $x_۲$ به ترتیب کدامند؟

الف) ۰٫۶۴۲۰ و ۰٫۴۰۱۵ ب) ۰٫۶۴۲۱ و ۰٫۴۰۱۵ ج) ۰٫۶۴۲۰ و ۰٫۴۰۱۶ د) ۰٫۶۴۲۱ و ۰٫۴۰۱۶

۲۱. چند تکرار روش دوبخشی در بازه $[-۰٫۵, ۱٫۵]$ لازم است تا ریشه $f(x) = ۱ - e^x$ با حداکثر خطای $۱۰^{-۳}$ محاسبه شود؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۸

۲۲. کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟

الف) روش دوبخشی برای یافتن تمامی ریشه‌ها همگرا است.

ب) مرتبه همگرایی روش نیوتن به مرتبه ریشه بستگی دارد.

ج) مرتبه همگرایی روش وتری بیشتر از مرتبه همگرایی روش نیوتن است.

د) روش نیوتن برای حل معادلات غیرخطی همیشه همگرا است.