تذکر ۲.۵ *به کمک گزاره ۴.۵ می‌توان پایه‌های دیگری برای فضای* $\mathbb{P}_n \otimes \mathbb{P}_m$ *ساخت. اگر* $\{\phi_i \ : \ i = 0, \dots, n\}$ *و* $\{\psi_j \ : \ j = 0, \dots, m\}$ *توابع پایه‌ای درونیاب به ترتیب روی مجموعه نقاط* $\{x_0, \dots, x_n\}$ *و* $\{y_0, \dots, y_m\}$ *باشند یعنی* $\phi_i(x_k) = \delta_{ik}$ *و* $\psi_j(y_l) = \delta_{jl}$ *آنگاه* $\{\phi_i \otimes \psi_j \ : \ i = 0, \dots, n, \ j = 0, \dots, m\}$ *یک پایه برای فضای* $\mathbb{P}_n \otimes \mathbb{P}_m$ *خواهد بود و داریم* $(\phi_i \otimes \psi_j)(x_k, y_l) = \delta_{ik}\delta_{jl} = \delta_{(i,j),(k,l)}$.

قضیه ۳.۵ *فرض کنید* $f(x,y)$ *تابعی دلخواه و* $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ *و* $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ *نقاطی متمایز به ترتیب در راستای محور* x *و* y *باشند. چندجمله‌ای یکتای* $p(x,y)$ *حداکثر از درجه* n *نسبت به* x *و حداکثر از درجه* m *نسبت به* y *چنان وجود دارد که*

$$p(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = f_{ij}, \qquad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m.$$

برهان. چندجمله‌ای $p(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f_{ij} L_i(x) L_j(y)$ را در نظر بگیرید که در آن L_i و L_j چندجمله‌ای‌های لاگرانژ یک متغیره هستند و چون در شرط دلتای کرونکر صدق می‌کنند خواهیم داشت

$$p(x_k, y_l) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f_{ij} L_i(x_k) L_j(y_l) = f_{kl}, \qquad k = 0, \dots, n, \quad l = 0, \dots, m.$$

برای اثبات یکتایی فرض کنید $p_1(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j$ و $p_2(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} x^i y^j$ دو چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط مفروض باشند. بنابراین خواهیم داشت

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_{ij} - b_{ij}) x_k^i y_l^j = 0, \qquad k = 0, \dots, n, \quad l = 0, \dots, m.$$

اگر قرار دهیم $c_{il} = \sum_{j=0}^{m} (a_{ij} - b_{ij}) y_l^j$ آنگاه $\sum_{i=0}^{n} c_{il} x_k^i = 0$ و یا

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{0l} \\ \vdots \\ c_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

و چون نقاط x_k متمایز هستند دترمینان ماتریس واندرموند مخالف صفر است و در نتیجه برای هر i داریم $c_{il} = 0$ و از این رو $\sum_{j=0}^{m} (a_{ij} - b_{ij}) y_l^j = 0$ و بنابراین داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & y_0 & \cdots & y_0^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_m & \cdots & y_m^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i0} - b_{i0} \\ \vdots \\ a_{im} - b_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

و چون نقاط y_l متمایز هستند دترمینان ماتریس واندرموند مخالف صفر است و در نتیجه برای هر i و j داریم $a_{ij} = b_{ij}$.

□

تذکر ۳.۵ *بنابراین ثابت شد اگر نقاط بر روی یک شبکه مستطیلی توزیع شده باشند (به شکل ۱.۵ نگاه کنید)، مسئله درونیابی جواب یکتا دارد. برای سایر حالاتی که مسئله درونیابی در بعد دو (یا بالاتر) جواب یکتا دارد به مرجع [۷]*

مراجعه کنید.

شکل ۱.۵: توزیع نقاط روی یک شبکه مستطیلی

قضیه ۴.۵ *اگر $f \in C^{n+1,m+1}(\Omega)$ و نقاط شبکه هم‌فاصله با اندازه گام h_x و h_y روی محور x و y باشند آنگاه*

$$|f(x,y) - p(x,y)| = O(h_x^{n+1}) + O(h_y^{m+1}).$$

برهان. تعریف می‌کنیم $\phi(x,y) = \sum_{j=0}^{m} L_j(y) f(x,y_j)$. برای x ثابت، $\phi(x,y)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر m نسبت به y است و بنابر قضیه خطای درونیابی یک متغیره داریم

$$|\phi(x,y) - f(x,y)| = O(h_y^{m+1}).$$

همچنین با تعریف $p(x,y) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\phi(x_i,y)$، به طور مشابه خواهیم داشت

$$|p(x,y) - \phi(x,y)| = O(h_x^{n+1}).$$

با ترکیب دو نابرابری به دست آمده، حکم نتیجه می‌شود. □

تعریف ۳.۵ *توابع $c_0(t), \dots, c_{n+2}(t)$ را اسپلاین‌های مکعبی اساسی*[۴] *در نقاط $t_0, \dots, t_n$ نامند هرگاه*

$$c_j(t_k) = \delta_{kj}, \qquad j = 0, \dots, n+2, \quad k = 0, \dots, n,$$
$$c'_j(t_0) = c'_j(t_n) = 0 \qquad j = 0, \dots, n,$$

$$c'_{n+1}(t_0) = c'_{n+2}(t_n) = 1, \quad c'_{n+1}(t_n) = c'_{n+2}(t_0) = 0.$$

ثابت می‌شود (بررسی کنید) اسپلاین مکعبی مقید را می‌توان به صورت زیر ساخت

$$sp(t) = \sum_{j=0}^{n} x_j c_j(t) + x'_0 c_{n+1}(t) + x'_n c_{n+2}(t).$$

حال به کمک ضرب تانسوری و با استفاده از اسپلاین‌های مکعبی اساسی، می‌توان اسپلاین‌های دومکعبی روی شبکه مستطیلی ساخت. به همین منظور تعریف می‌کنیم

$$S(x,y) = \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{m+2} \beta_{ij} c_i(x) c_j(y).$$

[۴] Fundamental

اگر برای $i = 0,\dots,n$ و $j = 0,\dots,m$ قرار دهیم $\beta_{ij} = f_{ij}$ به وضوح S درونیابی برای f در نقاط شبکه خواهد بود. برای معرفی کامل S به $(m+3)(n+3) - (m+1)(n+1) = 2m + 2n + 8$ شرط اضافی دیگر نیاز داریم که در ادامه یک انتخاب ممکن بیان شده است

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(x_i, y_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_i, y_j), && i = 0, n, \quad j = 0, m,\\
&\frac{\partial S}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j), && i = 0, n, \quad j = 0, \dots, m,\\
&\frac{\partial S}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j), && j = 0, m, \quad i = 0, \dots, n.
\end{aligned}
$$

ثابت می‌شود این اسپلاین دومکعبی یکتا است و به شرط همواری f به اندازه کافی، خطایی از مرتبه $O(h^4)$ دارد (نقاط روی دو محور هم‌فاصله با اندازه گام h در نظر گرفته شده‌اند).

پروژه ۱.۵ *لاگرانژ دوبعدی و اسپلاین دومکعبی.*

۲.۵ درونیابی با توابع قطعه‌ای چندجمله‌ای

فرض کنید Ω یک چندضلعی محدب در $\mathbb{R}^2$ باشد. اگر Ω یک ناحیه محدب باشد مرز آن را با چندضلعی محدب تقریب می‌زنیم. Ω را می‌توان به k عنصر یا جزء یا المان ناهم‌پوشان[5] T تجزیه کرد (بیشتر مواقع عناصر مثلث هستند) و به این طریق یک شبکه‌بندی (مثلث‌سازی) روی Ω به دست می‌آید که آن را با τ_h نمایش می‌دهند. به وضوح $\overline{\Omega} = \cup_{T \in \tau_h} T$. فرض کنید طول بزرگ‌ترین یال (ضلع) در مثلث‌سازی از عدد مثبت h بزرگ‌تر نباشد. در یک مثلث‌سازی (شبکه‌بندی) مجاز (پذیرفتنی) اشتراک هر دو مثلث حداکثر یا در یک راس یا در یک یال است و هر گره شبکه باید راس یک مثلث باشد و هر راس مثلث باید یک گره شبکه باشد و اگر گره‌ای از شبکه به مثلثی تعلق داشته باشد باید یکی از رئوس آن مثلث باشد. در شکل ۲.۵ نمونه‌هایی از مثلث‌سازی را می‌بینید.

شکل ۲.۵: شبکه‌بندی مجاز (چپ) و شبکه‌بندی غیرمجاز (راست)

به کمک نگاشت آفین

$$
\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F_T\left(\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}\right) = B_T \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},
$$

[5] None-overlapping element

با وارون

$$\hat{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = F_{_T}^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = B_{_T}^{-1}\begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{bmatrix},$$

که در آن

$$B_{_T} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix},$$

می‌توان هر مثلث $T \in \tau_{_h}$ با مساحت $|T|$ و رئوس $a_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$، $i = 1, 2, 3$ را به مثلث مرجع $\hat{T}$ با مساحت ۱/۲ و رئوس $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ در صفحه $\hat{x}\hat{y}$ منتقل کرد (شکل ۳.۵ را ببینید).

شکل ۳.۵: انتقال مثلث دلخواه به مثلث مرجع

نگاشت آفین بیان‌شده از اهمیت ویژه‌ای در کارهای محاسباتی برخوردار است زیرا به محض آن که یک پایه برای نمایش درونیاب قطعه‌ای چندجمله‌ای روی $\hat{T}$ ساخته شود، کافی است از تغییر متغیر $\mathrm{x} = F_{_T}(\hat{\mathrm{x}})$ برای بازسازی چندجمله‌ای روی هر عنصر T از $\tau_{_h}$ استفاده کرد. بنابراین علاقمندیم توابع پایه را به صورت موضعی (روی عنصر مرجع) بسازیم و به مثلث T انتقال دهیم بدون آن که به اطلاعاتی از مثلث‌های مجاور نیاز داشته باشیم. فرض کنید گره‌های درونیاب قطعه‌ای چندجمله‌ای روی $\tau_{_h}$ به صورت زیر باشند

$$z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \ldots, z_{_N} = \begin{bmatrix} x_{_N} \\ y_{_N} \end{bmatrix},$$

و

$$\mathbb{P}_k^2(\Omega) = \{p(x, y) = \sum_{0 \le i+j \le k} a_{ij} x^i y^j \ : \ \Omega \to \mathbb{R}\},$$

و برای $k \ge 0$، $\tilde{\mathbb{P}}_k(\Omega)$ فضای توابع قطعه‌ای چندجمله‌ای حداکثر درجه k روی Ω باشد به طوری که برای هر $p \in \tilde{\mathbb{P}}_k(\Omega)$ داشته باشیم $p|_{_T} \in \mathbb{P}_k(T)$ برای هر $T \in \tau_{_h}$. یک پایه مقدماتی برای $\tilde{\mathbb{P}}_k(\Omega)$ به کمک چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $L_i(x, y)$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که برای $i, j = 1, \ldots, N$ داشته باشیم $L_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$ (به شکل ۴.۵ نگاه کنید).

سپس برای $k \ge 0$، درونیاب قطعه‌ای چندجمله‌ای لاگرانژ حداکثر درجه k تابع f یعنی $\pi_h^k f \in \tilde{\mathbb{P}}_k(\Omega)$ به صورت زیر

تعریف می‌شود

$$\pi_h^k f(x,y) = \sum_{i=1}^{N} f(z_i) L_i(x,y). \tag{۱.۵}$$

شکل ۴.۵: توابع شکلی

باید توجه داشت که $\pi_h^0 f$ یک تابع قطعه‌ای ثابت و در نتیجه ناپیوسته است و به همین دلیل کمتر استفاده می‌شود در حالی که $\pi_h^1 f$ یک تابع قطعه‌ای است که روی هر المان خطی و روی رئوس مثلث پیوسته و در نتیجه در سراسر Ω پیوسته است. برای هر $T \in \tau_h$، تحدید درونیاب قطعه‌ای چندجمله‌ای لاگرانژ حداکثر درجه k تابع f روی المان T را با $\pi_T^k f$ نمایش می‌دهیم. بنابر تعریف داریم $\pi_T^k f \in \mathbb{P}_k(T)$ و با توجه به $d_k = \dim \mathbb{P}_k(T) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ می‌توان نوشت

$$\pi_T^k f(x,y) = \sum_{m=0}^{d_k-1} f(\tilde{z}_{T,m}) L_{T,m}(x,y), \qquad \forall T \in \tau_h,$$

که در آن $\tilde{z}_{T,m}$ برای $m = 0,\dots,d_k - 1$ گره‌های درونیابی روی T هستند و $L_{T,m}(x,y)$ تحدید چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ با اندیس i در رابطه (۱.۵) روی T است به طوری که در اندیس‌گذاری سراسری، گره z_i متناظر با گره موضعی $\tilde{z}_{T,m}$ باشد. بنابراین داریم $L_{T,j}(\mathrm{x}) = \hat{L}_j \circ F_T^{-1}(\mathrm{x})$ که در آن $\hat{L}_j = \hat{L}_j(\hat{\mathrm{x}})$ برای $j = 0,\dots,d_k - 1$، jامین تابع پایه‌ای لاگرانژ برای $\mathbb{P}_k(\hat{T})$ تولیدشده روی عنصر مرجع $\hat{T}$ است. اگر $k = 0$ آنگاه $d_0 = 1$ یعنی فقط یک گره درونیابی موضعی (مرکز ثقل مثلث T) وجود دارد حال آن که اگر $k = 1$ آنگاه $d_1 = 3$ یعنی سه گره درونیابی موضعی منطبق بر سه راس T وجود دارد (به شکل ۵.۵ نگاه کنید). توزیع نقاط به گونه‌ای است که ثابت می‌شود درونیاب یکتا است. برای $k \geq 3$ به مراجع روش عناصر متناهی[۶] مانند [۱۹] مراجعه کنید.

شکل ۵.۵: گره‌های درونیابی

[۶] Finite element method

مثال ۴.۵ *برای درونیابی دوخطی یعنی برای $k = 1$ و $d_1 = 3$ داریم*

$$\hat{L}_0(\hat{x},\hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}, \qquad \hat{L}_1(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x}, \qquad \hat{L}_2(\hat{x},\hat{y}) = \hat{y},$$

برای درونیابی درجه دو یعنی برای $k = 2$ و $d_2 = 6$ داریم

$$\hat{L}_0(\hat{x},\hat{y}) = (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y}), \qquad \hat{L}_1(\hat{x},\hat{y}) = \hat{y}(2\hat{y} - 1), \qquad \hat{L}_2(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x}(2\hat{x} - 1),$$
$$\hat{L}_3(\hat{x},\hat{y}) = 4\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y}), \qquad \hat{L}_4(\hat{x},\hat{y}) = 4\hat{x}\hat{y}, \qquad \hat{L}_5(\hat{x},\hat{y}) = 4\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y}).$$

$\triangle$

به شکل ۶.۵ نگاه کنید.

شکل ۶.۵: درونیابی موضعی

اگر برای $T \in \tau_h$ بزرگترین طول یال T را با h_T نمایش دهیم، ثابت می‌شود

$$\left\|f - \pi_T^k f\right\|_{\infty,T} \le C h_T^{k+1} \left\|f^{(k+1)}\right\|_{\infty,T},$$

که در آن نرم بینهایت روی مثلث T حساب می‌شود و C ثابتی مستقل از h_T و f است و اگر مثلث‌سازی منظم باشد یعنی ثابت σ چنان وجود داشته باشد که $\forall T : \frac{h_T}{\rho_T} \ge \sigma$ که در آن برای هر T، ρ_T قطر دایره محاطی T است، آنگاه به شرط همواری f به اندازه کافی می‌توان نوشت

$$\left\|f - \pi_h^k f\right\|_{\infty,\Omega} \le C h^{k+1} \left\|f^{(k+1)}\right\|_{\infty,\Omega}.$$

فصل ۶

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

۱.۶ مشتق‌گیری عددی

در این بخش یا با یک تابع مواجه هستیم که ترجیح می‌دهیم به طور مستقیم از ضابطه آن مشتق نگیریم و یا ممکن است با جدولی از مقدارهای یک تابع مشتق‌پذیر روبرو باشیم و قصد داشته باشیم مشتق‌گیری را به صورت عددی (تقریبی) انجام دهیم و برای این منظور می‌توان از چندجمله‌ای درون‌یاب، بسط تیلور و روش گاوس استفاده کرد و به کمک فن برون‌یابی ریچاردسون تقریب بهتری به دست آورد.

۱.۱.۶ استفاده از چندجمله‌ای درون‌یاب

چندجمله‌ای درون‌یاب تقریب دقیقی (خوبی) از تابع در نقاط درون‌یابی به دست می‌دهد و امیدواریم مشتق چندجمله‌ای درون‌یاب نیز تقریب خوبی از مشتق تابع در نقاط درون‌یابی باشد، به شکل ۱.۶ توجه کنید.

شکل ۱.۶: بررسی مشتق چندجمله‌ای درون‌یاب

فرض کنید $\{x_0,\ldots,x_n\}$، $n+1$ نقطه متمایز در بازه I بوده و $f\in C^{n+1}(I)$. بنابر قضیه خطای چندجمله‌ای درون‌یاب

داریم

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)}_{P(x)} + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

که در آن $\xi(x) \in I$. با مشتق‌گیری نتیجه می‌شود

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L'_k(x) + \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}\right) f^{(n+1)}(\xi(x)) + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \frac{df^{(n+1)}(\xi(x))}{dx}}_{t_n(x)}.$$

از این رابطه می‌توان برای تقریب $f'(x)$ به ازای هر $x \in I$ استفاده نمود ولی مشکل اصلی، تعیین جمله خطای برشی[1] $t_n(x)$ است زیرا از $f^{(n+1)}(\xi(x))$ اطلاع کافی در دسترس نیست. اما اگر x یکی از نقاط درون‌یابی مانند x_j باشد خواهیم داشت

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f_k L'_k(x_j) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{j\neq k=0}^{n} (x_j - x_k)}_{t_n(x_j)}.$$

این عبارت یک رابطه $n+1$ نقطه‌ای برای تقریب مشتق است. در ادامه طرح‌های دو، سه و پنج نقطه‌ای معرفی می‌شوند که در مشتق‌گیری عددی پرکاربرد هستند.

با توجه به درون‌یابی در نقاط x_{i-1}، x_i و x_{i+1} می‌توان نوشت $L_{i-1}(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}$ بنابراین

$$L'_{i-1}(x) = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}$$

و به طور مشابه داریم

$$L'_i(x) = \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})}, \qquad L'_{i+1}(x) = \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}$$

در نتیجه برای $j = i-1, i, i+1$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f'(x_j) = f(x_{i-1})&\frac{2x_j - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} + f(x_i)\frac{2x_j - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} + \\ f(x_{i+1})&\frac{2x_j - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_j) \prod_{j\neq k=i-1}^{i+1} (x_j - x_k) \end{aligned}$$

که در آن ξ_j وابسته به x_j است. اگر نقاط هم فاصله باشند یعنی برای $k = i-1, i$ داشته باشیم $x_{k+1} - x_k = h$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f'(x_{i-1}) &= f'_{i-1} = \frac{-3f_{i-1} + 4f_i - f_{i+1}}{2h} + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_{i-1}) \\ f'(x_i) &= f'_i = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_i) \\ f'(x_{i+1}) &= f'_{i+1} = \frac{f_{i-1} - 4f_i + 3f_{i+1}}{2h} + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_{i+1}) \end{aligned}$$

---

[1] Truncation error

و با تغییر اندیس خواهیم داشت

$$f'_i = f'(x_i) = \frac{-۳f_i + ۴f_{i+۱} - f_{i+۲}}{۲h} + \frac{h^۲}{۳}f^{(۳)}(\xi_۱), \quad x_i < \xi_۱ < x_{i+۲} \quad \text{(پیشرو سه نقطه‌ای)}$$
$$f'_i = f'(x_i) = \frac{-f_{i-۱} + f_{i+۱}}{۲h} - \frac{h^۲}{۶}f^{(۳)}(\xi_۲), \quad x_{i-۱} < \xi_۲ < x_{i+۱} \quad \text{(مرکزی سه نقطه‌ای)}$$
$$f'_i = f'(x_i) = \frac{f_{i-۲} - ۴f_{i-۱} + ۳f_i}{۲h} + \frac{h^۲}{۳}f^{(۳)}(\xi_۳), \quad x_{i-۲} < \xi_۳ < x_i \quad \text{(پسرو سه نقطه‌ای)}$$

تذکر ۱.۶ *در مقایسه با طرح‌های سه نقطه‌ای، رابطه‌های دو نقطه‌ای زیر از دقت کمتری برخوردار هستند*

$$f'_i = f'(x_i) = \frac{f_{i+۱} - f_i}{h} + O(h) \quad \text{پیشرو دو نقطه‌ای}$$
$$f'_i = f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-۱}}{h} + O(h) \quad \text{پسرو دو نقطه‌ای}$$

در حالتی که نقاط هم‌فاصله باشند می‌توان از رابطه‌های درون‌یابی پیشرو (پسرو) نیوتن استفاده نمود. به عنوان مثال چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو نیوتن در نقاط هم‌فاصله $x_i, \ldots, x_{i+k}$ عبارت است از

$$p(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_i + \cdots + \frac{\theta(\theta-۱)\cdots(\theta-k+۱)}{k!}\Delta^k f_i, \qquad \theta = \frac{x - x_i}{h}$$

و با توجه به این که $f(x) \simeq p(x)$ قرار می‌دهیم $f'(x) \simeq p'(x)$ و در نتیجه

$$f'(x) \simeq \frac{۱}{h}\left(\Delta f_i + (\theta - \frac{۱}{۲})\Delta^۲ f_i + (\frac{\theta^۲}{۲} - \theta + \frac{۱}{۳})\Delta^۳ f_i + \cdots\right)$$

(توجه داریم که $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{۱}{h}\frac{dp}{d\theta}$). حال اگر $x = x_i$ ($\theta = ۰$)، خواهیم داشت

$$f'(x_i) = f'_i \simeq \frac{۱}{h}\left(\Delta f_i - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ f_i + \frac{۱}{۳}\Delta^۳ f_i - \frac{۱}{۴}\Delta^۴ f_i + \cdots\right)$$

که با انتخاب یک یا دو یا چند جمله از عبارت داخل پرانتز می‌توان رابطه‌های تقریبی متفاوتی به دست آورد، به عنوان مثال

$$f'_i \simeq \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{f_{i+۱} - f_i}{h}, \qquad f'_i \simeq \frac{۱}{h}(\Delta f_i - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ f_i) = \frac{-۳f_i + ۴f_{i+۱} - f_{i+۲}}{۲h}, \qquad \cdots$$

تمرین ۱.۶ *با استفاده از چندجمله‌ای درون‌یاب پسرو نیوتن رابطه‌هایی به صورت پسرو برای مشتق به دست آورید.*

تذکر ۲.۶ *با انتخاب $x = x_i + \frac{h}{۲}$ ($\theta = \frac{۱}{۲}$) رابطه زیر به دست می‌آید*

$$f'(x_i + \frac{h}{۲}) = f'_{i+\frac{۱}{۲}} \simeq \frac{۱}{h}(\Delta f_i - \frac{۱}{۲۴}\Delta^۳ f_i + \cdots)$$

و از آن‌جا خواهیم داشت

$$f'_{i+\frac{۱}{۲}} \simeq \frac{\Delta f_i}{h}, \qquad f'_{i+\frac{۱}{۲}} \simeq \frac{۱}{h}(\Delta f_i - \frac{۱}{۲۴}\Delta^۳ f_i), \quad \cdots.$$

تمرین ۲.۶ *با استفاده از بسط تیلور $f(x_i+h)$ و $f(x_i+\frac{h}{2})$ نشان دهید $\frac{\Delta f_i}{h}$ برای تقریب $f'_{i+\frac{1}{2}}$ دقیق‌تر است تا برای تقریب f'_i، به عبارت دیگر داریم*

$$f'_i = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h), \qquad f'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h^2).$$

۲.۱.۶ استفاده از بسط تیلور

برای به دست آوردن رابطه‌های تقریبی مشتق می‌توان از بسط تیلور توابع

$$\ldots, f(x-2h), f(x-h), f(x+h), f(x+2h), \ldots$$

استفاده کرده و یک ترکیب خطی از آن‌ها به گونه‌ای ساخت که خطا از مرتبه $O(h^p)$ باشد.

مثال ۱.۶ به کمک *رابطه‌های*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \tfrac{h^2}{2!}f''(x) + \tfrac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \tfrac{h^2}{2!}f''(x) - \tfrac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

طرح‌های $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h)$، $f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h)$ و $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$ *به دست می‌آیند. هم‌چنین به کمک بسط تیلور*

$$f(x\pm 2h) = f(x) \pm 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) \pm \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

و ساختن ترکیب خطی $f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)$ *به رابطه*

$$f'(x) = \frac{1}{12h}(f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)) + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

خواهیم رسید که یک رابطه پنج نقطه‌ای با خطای برشی $O(h^4)$ *است و در آن* $x-2h \le \xi \le x+2h$. △

تمرین ۳.۶ به کمک روش بسط تیلور، *رابطه پنج نقطه‌ای پیشرو یعنی*

$$f'(x) = \frac{1}{12h}(-25f(x) + 48f(x+h) - 36f(x+2h) + 16f(x+3h) - 3f(x+4h)) + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi)$$

را استخراج کنید که در آن $x \le \xi \le x+4h$. *سپس با تبدیل* h *به* $-h$ *شکل پسروی آن را نیز به دست آورید.*

۳.۱.۶ روش گاوس

تعریف ۱.۶ گوییم مرتبه دقت (صحت) *یک عبارت تقریبی* n *است اگر آن رابطه برای چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر* n *دقیق باشد. به عنوان مثال اگر ضریب* h^p *در یک رابطه با خطای* $O(h^p)$ *برابر* $f^{(p+1)}(\xi)$ *باشد آن‌گاه مرتبه دقت آن روش به وضوح* p *خواهد بود.*

با یک نگاه به رابطه‌های تقریبی مشتق، می‌توان همه آن‌ها را به صورت کلی زیر معرفی کرد

$$f'(x_i) = \sum_{k=n_1}^{n_2} w_k f(x_k) + E$$

که در آن $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. برای ساختن یک عبارت n نقطه‌ای برای تقریب مشتق، ابتدا اگر بخواهیم به صورت پیشرو عمل کنیم، قرار می‌دهیم $n_1 = i$ و $n_2 = i+n-1$ و اگر بخواهیم به صورت پسرو عمل نماییم، قرار می‌دهیم $n_1 = i-n+1$ و $n_2 = i$ و اگر بخواهیم به صورت مرکزی عمل کنیم، قرار می‌دهیم $n_1 = i - \frac{n-1}{2}$ و $n_2 = i + \frac{n-1}{2}$. سپس ضرایب w_kها را به گونه‌ای به دست می‌آوریم که مرتبه دقت رابطه $n-1$ باشد.

مثال ۲.۶ *رابطه پنج نقطه‌ای پسرو برای تقریب مشتق مرتبه اول را با روش گاوس بسازید.*
ابتدا قرار می‌دهیم

$$f'(x_i) = w_{i-4}f_{i-4} + w_{i-3}f_{i-3} + w_{i-2}f_{i-2} + w_{i-1}f_{i-1} + w_i f_i + E$$

و سپس به ازای $f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4$ *قرار می‌دهیم* $E = 0$ *و دستگاه معادله‌های زیر را می‌سازیم*

$$\begin{cases} 0 = w_{i-4} + w_{i-3} + w_{i-2} + w_{i-1} + w_i \\ 1 = w_{i-4}x_{i-4} + w_{i-3}x_{i-3} + w_{i-2}x_{i-2} + w_{i-1}x_{i-1} + w_i x_i \\ 2x_i = w_{i-4}x_{i-4}^2 + w_{i-3}x_{i-3}^2 + w_{i-2}x_{i-2}^2 + w_{i-1}x_{i-1}^2 + w_i x_i^2 \\ 3x_i^2 = w_{i-4}x_{i-4}^3 + w_{i-3}x_{i-3}^3 + w_{i-2}x_{i-2}^3 + w_{i-1}x_{i-1}^3 + w_i x_i^3 \\ 4x_i^3 = w_{i-4}x_{i-4}^4 + w_{i-3}x_{i-3}^4 + w_{i-2}x_{i-2}^4 + w_{i-1}x_{i-1}^4 + w_i x_i^4 \end{cases}$$

و از حل آن خواهیم داشت

$$w_{i-4} = \frac{1}{4h},\ w_{i-3} = \frac{-4}{3h},\ w_{i-2} = \frac{3}{h},\ w_{i-1} = \frac{-4}{h},\ w_i = \frac{25}{12h}.$$

با انتخاب $f(x) = x^5$ *می‌توان جمله خطا را به دست آورد.* $\triangle$

۴.۱.۶ فن برون‌یابی ریچاردسون

فن برون‌یابی ریچاردسون کاربرد وسیعی در بسیاری از مباحث آنالیز عددی مانند مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی دارد و در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم. فرض کنید به ازای عدد مخالف صفر h (به عنوان مثال h اندازه گام است) رابطه $N(h)$ تقریبی برای کمیت M باشد و خطای مرتکب شده به صورت زیر قابل ارایه باشد

$$M = N(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \cdots \qquad (1.6)$$

که در آن $K_1, K_2, \dots$ کمیت‌های ثابتی هستند. چون رابطه (۱.۶) به ازای هر h برقرار است با تبدیل h به $\frac{h}{2}$ در آن خواهیم داشت

$$M = N(\frac{h}{2}) + K_1\frac{h}{2} + K_2\frac{h^2}{4} + K_3\frac{h^3}{8} + \cdots \tag{2.6}$$

اگر رابطه (۱.۶) را از دو برابر رابطه (۲.۶) کم کنیم می‌توان نوشت

$$M = (2N(\frac{h}{2}) - N(h)) + (\frac{1}{2} - 1)K_2h^2 + (\frac{1}{4} - 1)K_3h^3 + (\frac{1}{8} - 1)K_4h^4 + \cdots$$

یعنی به‌کمک تقریب کم دقت $M = N(h) + O(h)$ به تقریب دقیق‌تر $M = (2N(\frac{h}{2}) - N(h)) + O(h^2)$ دست یافتیم.
حال با فرض $N_1(h) = N(h)$ و $N_2(h) = (2N_1(\frac{h}{2}) - N_1(h))$ می‌توان نوشت

$$M = N_2(h) - \frac{K_2}{2}h^2 - \frac{3K_3}{4}h^3 - \frac{7K_4}{8}h^4 - \cdots. \tag{3.6}$$

با تبدیل h به $\frac{h}{2}$ در رابطه (۳.۶) به رابطه زیر می‌رسیم

$$M = N_2(\frac{h}{2}) - \frac{K_2}{8}h^2 - \frac{3K_3}{32}h^3 - \frac{7K_4}{128}h^4 - \cdots. \tag{4.6}$$

اگر رابطه (۳.۶) را از چهار برابر رابطه (۴.۶) کم کنیم خواهیم داشت

$$M = \frac{4N_2(\frac{h}{2}) - N_2(h)}{3} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8})K_3h^3 + (\frac{7}{24} - \frac{7}{96})K_4h^4 + \cdots$$

و با فرض $N_3(h) = \frac{4N_2(\frac{h}{2}) - N_2(h)}{3}$، از تقریب کم دقت $M = N_2(h) + O(h^2)$ به تقریب دقیق‌تر $M = N_3(h) + O(h^3)$ رسیدیم و با یک روند استقرایی به ازای $j = 2, 3, \dots$ به نتیجه زیر دست می‌یابیم

$$M = N_j(h) + O(h^j)$$

که در آن

$$N_j(h) = \frac{2^{j-1}N_{j-1}(\frac{h}{2}) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1}.$$

مثال ۳.۶ *با استفاده از بسط تیلور، رابطه سه نقطه‌ای مرکزی برای تقریب مشتق به صورت زیر به دست می‌آید*

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(x_i) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_i) - \cdots.$$

با فرض $M = f'(x_i)$ و $N(h) = N_1(h) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h}$، از تکرار فن برون‌یابی ریچاردسون به ازای $j = 2, 3, \dots$ خواهیم داشت

$$f'(x_i) = N_j(h) + O(h^{2j})$$

$N_۱$	$N_۲$	$N_۳$
$N_۱(۰/۲) = ۲۲/۴۱۴۱۶۰$		
$N_۱(۰/۱) = ۲۲/۲۲۸۷۸۶$	$N_۲(۰/۲) = ۲۲/۱۶۶۹۹۵$	
$N_۱(۰/۰۵) = ۲۲/۱۸۲۵۶۴$	$N_۲(۰/۱) = ۲۲/۱۶۷۱۵۷$	$N_۳(۰/۲) = ۲۲/۱۶۷۱۶۸$

جدول ۱.۶: جدول برون‌یابی ریچاردسون برای مشتق‌گیری عددی

که در آن

$$N_j(h) = \frac{۴^{j-۱}N_{j-۱}(\frac{h}{۲}) - N_{j-۱}(h)}{۴^{j-۱} - ۱}.$$

با انتخاب $f(x) = xe^x$، $x_i = ۲/۰$ *و* $h = ۰/۲$ *جدول ۱.۶ به دست می‌آید. از مقایسه* $N_۳(۰/۲)$ *با مقدار دقیق* $f'(۲/۰) = ۳/۰e^{۲/۰} = ۲۲/۱۶۷۱۶۸$ *نتیجه می‌گیریم تمام ارقام با معنای* $N_۳(۰/۲)$ *درست هستند.* $\triangle$

تذکر ۳.۶ *با استفاده از طرح‌های مشتق‌گیری عددی، می‌توان رابطه‌هایی برای تقریب مشتق‌های مراتب بالاتر یک تابع نیز به دست آورد. به عنوان مثال با دوبار مشتق‌گیری از چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو نیوتن خواهیم داشت*

$$f''(x) \simeq \frac{۱}{h^۲}(\Delta^۲ f_i + (\theta - ۱)\Delta^۳ f_i + \cdots)$$

و با انتخاب $x = x_i$ $(\theta = ۰)$ *رابطه‌های*

$$f''(x_i) = f''_i \simeq \frac{\Delta^۲ f_i}{h^۲} = \frac{f_{i+۲} - ۲f_{i+۱} + f_i}{h^۲}, \qquad f''_i \simeq \frac{۱}{h^۲}(\Delta^۲ f_i - \Delta^۳ f_i), \qquad \cdots$$

نتیجه می‌شود. به عنوان تمرین خطای برشی این طرح‌ها را به دست آورید.

تمرین ۴.۶ *از تابع* $y = f(x)$ *در بازه* $[۰, ۱]$، *داده‌های جدول زیر در دسترس است.*

x	۰	۰/۲۵	۰/۳۷۵	۰/۵	۰/۶۲۵	۰/۷۵	۱
$f(x)$	۰	۰/۱۳۵۰۶	۰/۱۶۰۶۱	۰/۱۶۸۸۷	۰/۱۶۵۵۲	۰/۱۵۴۹۰	۰/۱۲۳۸۵

آـ مقدار تقریبی $f'(۰)$، $f'(۰/۵)$ *و* $f'(۱)$ *را به چند روش حساب کنید.*

بـ مقدار تقریبی $f''(۰)$، $f''(۰/۵)$ *و* $f''(۱)$ *را به چند روش حساب کنید.*

پـ در صورت امکان، به کمک فن برونیابی ریچاردسون جواب‌های دقیق‌تری برای دو قسمت قبل به دست آورید.

تذکر ۴.۶ *در حالت کلی رابطه‌های مشتق دارای خطایی از مرتبه* $O(h^p)$ *هستند که بستگی به تعداد نقاط درون‌یابی دارد. در ظاهر یا باید* p *بزرگ باشد که منجر به افزایش محاسبات (فراخوانی تابع) و رشد خطای گرد کردن می‌شود و یا باید* h *کوچک باشد که این نیز ممکن است مشکل‌ساز باشد، به عنوان نمونه در محاسبه* $\frac{f_{i+۱}-f_i}{h}$ *اگر* h *کوچک باشد* f_i *و* $f_{i+۱}$ *به هم نزدیک خواهند بود و تفاضل دو عدد نزدیک به هم باعث از بین رفتن ارقام بامعنا خواهد شد که منجر به تولید خطا می‌شود و این خطا به عدد کوچکی* (h) *تقسیم می‌شود که خطای تولید شده را بزرگ خواهد کرد. از طرف دیگر اگر* p *تقریب خوبی برای* f *باشد دلیلی ندارد* p' *نیز تقریب خوبی برای* f' *باشد. به همین دلیل سعی می‌شود مشتق‌گیری عددی با احتیاط انجام شود.*

۲.۶ انتگرال‌گیری عددی

محاسبه $\int_a^b x(t)dt$ زمانی که تابع اولیه x در دسترس نیست یا محاسبه تابع اولیه به سادگی امکان‌پذیر نیست و یا وقتی که از x فقط داده‌های جدولی در دسترس است از مسایل اساسی انتگرال‌گیری است. برای حل این مسئله، در این فصل قصد داریم انتگرال‌گیری را به صورت عددی (تقریبی) انجام دهیم. به عنوان مثال می‌توان به انتگرال‌های $\int_a^b e^{-t^2}dt$، $\int_{-a}^a \sqrt[n]{1+t^n}dt$ و $\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}dt$ اشاره کرد. در واقع یکی از مسایل مستقیم مهم و پرکاربرد، انتگرال‌گیری عددی است. در اینجا با مسئله مستقیم $y = Lx$ مواجه هستیم که $L : X \to Y$ (X و Y فضاهای خطی نرم‌دار هستند) یک عملگر خطی و کران‌دار است.

تمرین ۵.۶ *اگر* $Lx = \int_a^b x(t)dt$ و $X = C[a,b]$ *همراه با نرم بینهایت در نظر گرفته شود نشان دهید* $\|L\| = b - a$.

بیشتر مواقع محاسبه Lx به سادگی امکان‌پذیر نیست و y را به طور تقریبی به دست می‌آوریم. به همین منظور دو راه‌کار پیشنهاد می‌شود که عبارتند از

۱. تقریب x با x_n و سپس محاسبه $y_n = Lx_n$ به عنوان تقریبی از y.

۲. تقریب L با L_n و سپس محاسبه $y_n = L_n x$ به عنوان تقریبی از y.

زمانی که راه‌کار اول را دنبال کنیم قضیه زیر قابل بررسی است.

قضیه ۱.۶ *اگر x_n به x با مرتبه p همگرا باشد آنگاه y_n به y حداقل با مرتبه p همگرا می‌شود.*

برهان. بنابر تعریف و ویژگی‌های بیان‌شده داریم

$$\|y - y_n\| = \|L(x - x_n)\| \le \|L\| \, \|x - x_n\| \le C \, \|L\| \, n^{-p}.$$

□ دنبال کردن راه‌کار دوم به سادگی راه‌کار اول نیست. با توجه به نابرابری

$$\|y - y_n\| = \|(L - L_n)x\| \le \|L - L_n\| \, \|x\|,$$

اگر داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \|L - L_n\| = 0,$$

آنگاه همگرایی y_n به y نتیجه می‌شود.

مثال ۴.۶ *فرض کنید* $Lx = \int_0^1 x(t)dt$ *و جمع ریمان* $L_n x = h\sum_{i=0}^{n-1} x(ih)$ *را برای* $h = 1/n$ *در نظر بگیرید. اگر عملگرهای L و L_n را روی فضای* $X = C[0,1]$ *همراه با نرم بینهایت در نظر بگیریم آنگاه*

$$\lim_{n\to\infty} \|L - L_n\| \neq 0.$$

برای نشان دادن این نابرابری، n را ثابت گرفته و ϕ_n را تابع پیوسته قطعه‌ای چندجمله‌ای درجه یک به صورت زیر در

نظر بگیرید

$$\phi_n(ih) = ۰, \qquad i = ۰, \ldots, n,$$
$$\phi_n((i+۱/۲)h) = ۱, \quad i = ۰, \ldots, n-۱.$$

به وضوح $L\phi_n = ۱/۲$ و $L_n\phi_n = ۰$ و بنابراین

$$\|L - L_n\| = \sup_{\|x\|=۱} \|(L - L_n)x\| \geq ۱/۲, \qquad \forall n.$$

$\triangle$

زمانی که راه‌کار دوم را دنبال کنیم قضیه ارزشمند زیر را داریم.

قضیه ۲.۶ *فرض کنید $\phi_۱, \phi_۲, \ldots$ یک پایه برای فضای خطی نرم‌دار X باشد و $X_n = \mathrm{Span}\{\phi_۱, \ldots, \phi_n\}$. اگر $\{L_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی کران‌دار یکنواخت باشند که روی X_n دقیق بوده (یعنی $L_n x_n = L x_n$ برای هر $x_n \in X_n$) و داشته باشیم $\sup_n \|L_n\| \leq l$، آنگاه $y_n = L_n x \to Lx = y$ و داریم $\|y - y_n\| \leq (\|L\| + l)\epsilon_n$ که در آن $\epsilon_n = \inf_{x_n \in X_n} \|x - x_n\|$.*

برهان. برای هر n داریم

$$\|y - y_n\| = \|(L - L_n)x\| = \|Lx - Lx_n + Lx_n - L_n x_n + L_n x_n - L_n x\| \leq \|L(x - x_n)\| + \|L_n(x - x_n)\|,$$

و از آنجا برای هر $x_n \in X_n$ خواهیم داشت $\|y - y_n\| \leq (\|L\| + l)\|x - x_n\| \leq (\|L\| + l)\epsilon_n$. چون $\phi_۱, \phi_۲, \ldots$ یک پایه برای X تشکیل می‌دهد، یک دنباله از $x_n \in X_n$ چنان وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = ۰$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \|y - y_n\| = ۰$. $\square$

تذکر ۵.۶ *اگر $Lx = \int_a^b x(t)dt$ آنگاه قواعد انتگرال‌گیری نیوتن-کاتس[۲] مبتنی بر درونیابی بوده و از ایده اول پیروی می‌کنند حال آن که قواعد گاوس[۳] بر اساس ایده دوم پایه‌ریزی شده‌اند.*

۱.۲.۶ قواعد نیوتن-کاتس

ایده اصلی این قواعد استفاده از تقریب $I = \int_a^b x(t)dt \simeq \int_a^b p_n(t)dt$ است که در آن p_n چندجمله‌ای درونیاب x است. این قواعد به دو دسته بسته و باز تقسیم‌بندی می‌شوند. در نوع بسته برای عدد صحیح $n > ۰$ فرض می‌شود $h = (b-a)/n$ و چندجمله‌ای درونیاب درجه n تابع x یعنی p_n روی نقاط $t_i = a + ih$ برای $i = ۰, \ldots, n$ ساخته می‌شود. پس

$$p_n(t) = \sum_{i=۰}^{n} x_i L_i(t), \qquad L_i(t) = \prod_{i\neq k=۰}^{n} (t - t_k)/(t_i - t_k),$$

---
[۲] Newton-Cotes
[۳] Gauss rules

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
α_0	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱۴}{۴۵}$	$\frac{۹۵}{۲۸۸}$	$\frac{۴۱}{۱۴۰}$
α_1	۰	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۹}{۸}$	$\frac{۶۴}{۴۵}$	$\frac{۳۷۵}{۲۸۸}$	$\frac{۲۱۶}{۱۴۰}$
α_2	۰	۰	۰	$\frac{۲۴}{۴۵}$	$\frac{۲۵۰}{۲۸۸}$	$\frac{۲۷}{۱۴۰}$
α_3	۰	۰	۰	۰	۰	$\frac{۲۷۲}{۱۴۰}$

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵
α_0	۲	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۸}{۳}$	$\frac{۵۵}{۲۴}$	$\frac{۶۶}{۲۰}$	$\frac{۴۲۷۷}{۱۴۴۰}$
α_1	۰	۰	$-\frac{۴}{۳}$	$\frac{۵}{۲۴}$	$-\frac{۸۴}{۲۰}$	$-\frac{۳۱۷۱}{۱۴۴۰}$
α_2	۰	۰	۰	۰	$\frac{۱۵۶}{۲۰}$	$\frac{۳۹۳۴}{۱۴۴۰}$

جدول ۲.۶: ضرایب قواعد نیوتن‌ـکاتس بسته (چپ) و باز (راست)

که با تغییر متغیر $t = a + hs$ داریم $L_i(t) = \phi_i(s) = \prod_{i\neq k=0}^{n}(s-k)/(i-k)$ و در نتیجه

$$I_n = \int_a^b p_n(t)dt = \sum_{i=0}^{n} x_i \int_a^b L_i(t)dt = h\sum_{i=0}^{n} x_i \int_0^n \phi_i(s)ds = h\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x_i,$$

که در آن وزن‌های $\alpha_i = \int_0^n \phi_i(s)ds$ فقط به n بستگی دارند و به a، b و حتی x وابسته نیستند. در قواعد باز برای عدد صحیح $n \geq 0$ فرض می‌شود $h = (b-a)/(n+2)$ و $t_{-1} = a$، $t_{n+1} = b$ و برای $i = 0, \dots, n$، $t_i = a + (i+1)h$ و مشابه قواعد بسته خواهیم داشت

$$I_n = h\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x_i, \qquad \alpha_i = \int_{-1}^{n+1}\phi_i(s)ds.$$

کافی است ضرایب قواعد $n+1$ نقطه‌ای نیوتن‌ـکاتس را یک بار حساب کرده و جدولی مانند جدول ۲.۶ ساخت و بارها از آن استفاده کرد. در این جدول برای قواعد بسته به ازای $i = 0, \dots, n-1$ داریم $\alpha_i = \alpha_{n-i}$ و برای قواعد باز به ازای $i = 0, \dots, n$ داریم $\alpha_i = \alpha_{n-i}$.

قضیه ۳.۶ *در قواعد $n+1$ نقطه‌ای نیوتن‌ـکاتس با n زوج به شرط آن که $x \in C^{n+2}[a,b]$ داریم*

$$E_n = I - I_n = \frac{M_n}{(n+2)!}h^{n+3}x^{(n+2)}(\xi),$$

و برای n فرد به شرط آن که $x \in C^{n+1}[a,b]$ داریم

$$E_n = \frac{M_n}{(n+1)!}h^{n+2}x^{(n+1)}(\xi).$$

و $\xi \in (a,b)$

$$M_n = \int_c^d t^m \prod_{i=0}^{n}(t-i)dt,$$

که در آن برای قواعد بسته $c = 0,\ d = n$ و برای قواعد باز $c = -1,\ d = n+1$ و برای n زوج $m = 1$ و برای n فرد $m = 0$.

برهان. به صفحه 314-308 مرجع [۱۳] مراجعه کنید. □

تذکر ۶.۶ *قواعد نیوتن‌ـکاتس $n+1$ نقطه‌ای با n زوج خطایی از مرتبه $O(h^{n+3})$ داشته و برای چندجمله‌ای‌های تا درجه $n+1$ دقیق هستند (درجه دقت آنها $n+1$ است) حال آن که برای n فرد خطایی از مرتبه $O(h^{n+2})$ داشته و*

برای چندجمله‌ای‌های تا درجه n دقیق هستند (درجه دقت آنها n است).

تذکر ۷.۶ *چون از یک طرف با بزرگ شدن n وزن‌ها افزایش می‌یابند و از طرف دیگر برای $n > ۶$ برای قواعد بسته ضرایب منفی تولید می‌شوند (جهت جلوگیری از پدیده از بین رفتن ارقام بامعنا ناشی از تفاضل دو عدد نزدیک به هم) قواعدی مقبول‌تر هستند که ضرایب منفی تولید نکنند و بنابراین جهت جلوگیری از رشد خطا قواعد نیوتن-کاتس با nهای بزرگ کمتر استفاده می‌شوند.*

تذکر ۸.۶ *برای محاسبه انتگرال‌هایی مانند $\int_{-۱}^{۱} \frac{dt}{t\sqrt{۱-t^۲}}$ قواعد بسته کارایی ندارند و بهتر است از قواعد باز استفاده کرد.*

برای به دست آوردن قواعد دقیق‌تر بهتر است از قواعد مرکب[۴] استفاده کرد. به همین منظور ابتدا بازه $[a,b]$ را به m (عدد طبیعی) زیربازه $T_j = [t_j, t_{j+۱}]$ که در آن $t_j = a + jH$ به طوری که $H = (b-a)/m$ تقسیم کرده و روی هر زیربازه از یک قاعده $n+۱$ نقطه‌ای استفاده می‌کنیم. اگر $t_j = t_۰^{(j)} < t_۱^{(j)} < \cdots < t_n^{(j)} = t_{j+۱}$ نقاط هم‌فاصله با اندازه گام h و $\alpha_i^{(j)}$ برای $i = ۰, \ldots, n$ وزن‌های نظیر باشند، آنگاه

$$I = \int_a^b x(t)dt = \sum_{j=۰}^{m-۱} \int_{T_j} x(t)dt \simeq I_{n,m} = h \sum_{j=۰}^{m-۱} \sum_{i=۰}^{n} \alpha_i^{(j)} x(t_i^{(j)}).$$

قضیه ۴.۶ *در قواعد نیوتن-کاتس مرکب با n زوج به شرط آن که $x \in C^{n+۲}[a,b]$ داریم*

$$E_{n,m} = I - I_{n,m} = \frac{(b-a)M_n}{(n+۲)!(n+۲)^{n+۳}} H^{n+۲} x^{(n+۲)}(\xi),$$

و برای n فرد به شرط آن که $x \in C^{n+۱}[a,b]$ داریم

$$E_{n,m} = \frac{(b-a)M_n}{(n+۱)!n^{n+۲}} H^{n+۱} x^{(n+۱)}(\xi).$$

$\xi \in (a,b)$ و M_n همانند قضیه ۳.۶ تعریف می‌شود.

برهان. به عنوان تمرین. □

تذکر ۹.۶ *درجه دقت قواعد مرکب همان درجه دقت قواعد ساده است ولی مرتبه خطای قواعد مرکب یک واحد کمتر از مرتبه خطای قواعد ساده است.*

تعریف ۲.۶ *هنگ (مدول) پیوستگی[۵] تابع $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ که با $\delta(x;H)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از*

$$\delta(x;H) = \sup\left\{ |x(t) - x(s)|,\ t,s \in [a,b],\ s \neq t,\ ۰ < |t-s| \leq H \right\}.$$

ثابت می‌شود هنگ پیوستگی x به صفر میل می‌کند (هرگاه $H \to ۰$) اگر و فقط اگر x پیوسته یکنواخت باشد.

---
[۴] Composite
[۵] Modulus of continuity

قضیه ۵.۶ *اگر $x \in C[a,b]$ و ضرایب $\alpha_i^{(j)}$ نامنفی باشند، آنگاه*

$$\lim_{m\to\infty} I_{n,m} = \int_a^b x(t)dt, \qquad \forall n \geq ۰.$$

به علاوه

$$\left|\int_a^b x(t)dt - I_{n,m}\right| \leq ۲(b-a)\delta(x;H).$$

برهان. به صفحه 341-343 مرجع [۱۳] مراجعه کنید. □ برای به دست آوردن قواعد دقیق‌تر، به نظر می‌رسد بهتر است درونیاب را تقویت کرد. به همین منظور از درونیاب هرمیت استفاده می‌کنیم. برای سادگی فرض کنید $۲n+۲$ مقدار $x(t_i)$ و $x'(t_i)$ برای $i=۰,\dots,n$ در دسترس باشند. درونیاب هرمیت ساده x به صورت زیر ساخته می‌شود

$$p_{۲n+۱}(t) = \sum_{i=۰}^{n}\left(x(t_i)\left(۱-\frac{w''_{n+۱}(t_i)}{w'_{n+۱}(t_i)}(t-t_i)\right)+x'(t_i)(t-t_i)\right)L_i^۲(t),$$

که در آن L_i همان چندجمله‌ای iام درجه n لاگرانژ در نقاط $t_۰,\dots,t_n$ است و $w_{n+۱}(t)=(t-t_۰)\cdots(t-t_n)$. با انتگرال‌گیری از درونیاب داریم

$$I_n = \sum_{i=۰}^{n}\alpha_i x(t_i) + \sum_{i=۰}^{n}\beta_i x'(t_i),$$

که در آن

$$\alpha_i = \int_a^b \left(۱-\frac{w''_{n+۱}(t_i)}{w'_{n+۱}(t_i)}(t-t_i)\right)L_i^۲(t)dt, \qquad \beta_i = \int_a^b (t-t_i)L_i^۲(t)dt.$$

ثابت می‌شود درجه دقت این قاعده $۲n+۱$ است. برای $n=۱$ این قاعده به صورت زیر در می آید

$$I_۱^{gt} = \frac{b-a}{۲}\left(x(a)+x(b)\right) + \frac{(b-a)^۲}{۱۲}\left(x'(a)-x'(b)\right),$$

و به قاعده ذوزنقه تعمیم‌یافته (اصلاح‌شده) معروف است و اگر $x \in C^۴[a,b]$ خواهیم داشت

$$E_۱^{gt} = I - I_۱^{gt} = \frac{(b-a)^۵}{۷۲۰}x^{(۴)}(\xi), \qquad \xi\in(a,b),$$

یعنی خطایی مشابه قاعده سیمسون. به سادگی می‌توان قاعده مرکب نظیر را به صورت زیر به دست آورد

$$I_{۱,m}^{gt} = \frac{b-a}{۲m}\left(x(a)+۲\sum_{i=۱}^{m-۱}x(t_i)+x(b)\right) + \frac{(b-a)^۲}{۱۲m^۲}(x'(a)-x'(b)),$$

و $E_{۱,m}^{gt} = \frac{b-a}{۷۲۰}h^۴x^{(۴)}(\xi)$ که در آن $\xi\in(a,b)$ و h اندازه گام نقاط هم‌فاصله است. بنابراین قاعده ذوزنقه تعمیم‌یافته مرکب با حجم عملیات کم، به خوبی با قاعده سیمسون مرکب رقابت می‌کند (هر دو با خطایی از مرتبه $O(h^۴)$ و درجه دقت سه). قاعده ذوزنقه مرکب برای توابعی که $x'(a)=x'(b)$ (به عنوان مثال توابع متناوب) خطایی در حد و اندازه روش سیمسون مرکب دارد و محدودیت آن را ندارد (نیاز به n زوج). تنها ایراد وارد بر قاعده ذوزنقه تعمیم‌یافته نیاز به مشتق در دو انتها است که به کمک تقریب‌های تفاضلی پیشرو/پسرو برطرف می‌شود. به کمک درونیاب هرمیت

تعمیم‌یافته می‌توان قواعد انتگرال‌گیری کلی‌تری به دست آورد که دارای شکل کلی زیر هستند

$$I_n[x] = \sum_{k=0}^{m_0} a_{k_0} x(t_{k0}) + \sum_{k=0}^{m_1} a_{k_1} x'(t_{k1}) + \cdots + \sum_{k=0}^{m_n} a_{k_n} x^{(n)}(t_{kn}).$$

بنابراین خطای قاعده انتگرال‌گیری عبارت است از $R[x] = I_n[x] - \int_a^b x(t)dt$. به وضوح R یک عملگر خطی روی یک فضای برداری مناسب مانند $\mathbb{P}_n$ یا $C^n[a,b]$ است ($R[\alpha x + \beta y] = \alpha R[x] + \beta R[y]$). به کمک قضیه زیر که به نمایش خطای پئانو[۶] معروف است می‌توان خطای قواعد انتگرال‌گیری مبتنی بر درونیابی را به دست آورد.

قضیه ۶.۶ *اگر برای هر $p \in \mathbb{P}_n$ داشته باشیم $R[p] = 0$، یعنی قاعده انتگرال‌گیری برای هر چندجمله‌ای حداکثر درجه n دقیق باشد (درجه دقت قاعده n باشد)، آنگاه*

$$R[x] = \int_a^b x^{(n+1)}(s) K(s) ds, \qquad \forall x \in C^{n+1}[a,b],$$

که در آن $K(s) = \frac{1}{n!} R[(t-s)_+^n]$ به هسته[۷] پئانو معروف است.

برهان. با نوشتن بسط تیلور تابع x حول $t_0 = a$، داریم

$$x(t) = x(a) + x'(a)(t-a) + \cdots + \frac{x^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + r_n(t), \qquad (۵.۶)$$

که در آن

$$r_n(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t x^{(n+1)}(s)(t-s)^n ds = \frac{1}{n!} \int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds.$$

با اعمال عملگر R بر رابطه (۵.۶) و با توجه به درجه دقت n داریم

$$R[x] = R[r_n] = \frac{1}{n!} R\left[\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds\right].$$

ابتدا نشان می‌دهیم

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds\right) = \int_a^b x^{(n+1)}(s) \frac{d^k}{dt^k}\left((t-s)_+^n\right) ds, \qquad 1 \le k \le n. \qquad (۶.۶)$$

چون تابع $(t-s)_+^n$، $n-1$ بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر است رابطه (۶.۶) به وضوح برای $1 \le k < n$ برقرار است و برای $k = n-1$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds\right) &= \int_a^b x^{(n+1)}(s) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left((t-s)_+^n\right) ds \\ &= n! \int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+ ds = n! \int_a^t x^{(n+1)}(s)(t-s) ds. \end{aligned}$$

---

[۶] Peano's error representation

[۷] Kernel

انتگرال آخر به عنوان تابعی از t مشتق‌پذیر است زیرا انتگرال‌ده آن به عنوان تابعی از s,t پیوسته است و در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}\left(\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds\right) &= \frac{d}{dt}\left(n!\int_a^t x^{(n+1)}(s)(t-s)ds\right)\\ &= n!\frac{d}{dt}\left(t\int_a^t x^{(n+1)}(s)ds - \int_a^t sx^{(n+1)}(s)ds\right)\\ &= n!\left(\int_a^t x^{(n+1)}(s)ds + tx^{(n+1)}(t) - tx^{(n+1)}(t)\right)\\ &= \int_a^t x^{(n+1)}(s)n!ds = \int_a^b x^{(n+1)}(s)\frac{d^n}{dt^n}\left((t-s)_+^n\right)ds.\end{aligned}$$

از طرف دیگر چون $x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n$ تابعی پیوسته است

$$\int_a^b\left(\int_a^b x^{(n+1)}(s)(t-s)_+^n ds\right)dt = \int_a^b x^{(n+1)}(s)\left(\int_a^b (t-s)_+^n dt\right)ds,$$

و بنابراین $R[x] = \frac{1}{n!}\int_a^b x^{(n+1)}(s)R\left[(t-s)_+^n\right]ds$. □

تذکر ۱۰.۶ *برای بسیاری از قواعد انتگرال‌گیری هسته پئانو تغییر علامت نمی‌دهد و بنابر قضیه مقدار میانگین تعمیم‌یافته نقطه $\xi \in (a,b)$ چنان وجود دارد که*

$$R[x] = x^{(n+1)}(\xi)\int_a^b K(s)ds.$$

این رابطه برای هر تابع x برقرار است و به ویژه برای $x(t) = t^{n+1}$ داریم

$$\int_a^b K(s)ds = \frac{R[t^{n+1}]}{(n+1)!},$$

و در نتیجه

$$R[x] = \frac{R[t^{n+1}]}{(n+1)!}x^{(n+1)}(\xi), \qquad \xi \in (a,b).$$

مثال ۵.۶ *قاعده سیمسون را در نظر بگیرید*

$$R[x] = \frac{1}{3}x(-1) + \frac{4}{3}x(0) + \frac{1}{3}x(1) - \int_{-1}^{1} x(t)dt.$$

این قاعده برای چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه سه دقیق است زیرا

$$\begin{aligned}R[1] &= \frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-2 = 0, \quad & R[t] &= \frac{-1}{3}+\frac{1}{3}-0 = 0,\\ R[t^2] &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3} = 0, & R[t^3] &= \frac{-1}{3}+\frac{1}{3}-0 = 0.\end{aligned}$$

بنابراین $n=3$ و در نتیجه

$$K(s)=\frac{1}{6}R[(t-s)_+^3]=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}(-1-s)_+^3+\frac{4}{3}(0-s)_+^3+\frac{1}{3}(1-s)_+^3-\int_{-1}^{1}(t-s)_+^3dt\right)$$

و از آنجا داریم

$$K(s)=\frac{1}{6}\left(0+\frac{4}{3}\begin{cases}0 & s\geq 0\\ -s^3 & s<0\end{cases}+\frac{1}{3}(1-s)^3-\int_{s}^{1}(t-s)^3dt\right)=\begin{cases}\frac{1}{72}(1-s)^3(1+3s) & 0\leq s\leq 1\\ \frac{1}{72}(1+s)^3(1-3s) & -1\leq s\leq 0\end{cases}$$

برای هر $s\in[-1,1]$ به وضوح $K(s)\geq 0$ و چون $\frac{R[t^4]}{4!}=\frac{1}{24}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\int_{-1}^{1}t^4dt\right)=\frac{1}{90}$ پس

$$\frac{1}{3}x(-1)+\frac{4}{3}x(0)+\frac{1}{3}x(1)-\int_{-1}^{1}x(t)dt=\frac{x^{(4)}(\xi)}{90},\qquad \xi\in(-1,1).$$

$\triangle$

تمرین ۶.۶ *خطای قاعده ذوزنقه تعمیم‌یافته را به دست آورید.*

تذکر ۱۱.۶ *قواعد نیوتن-کاتس $n+1$ نقطه‌ای برای n زوج دارای درجه دقت $n+1$ و برای n فرد دارای درجه دقت n هستند و ثابت می‌شود هسته پئانو برای آنها تغییر علامت نمی‌دهد و در نتیجه*

$$R[x]=\frac{R[t^{n+m}]}{(n+m)!}x^{(n+m)}(\xi),\qquad \xi\in(a,b),$$

که در آن برای n فرد $m=1$ و برای n زوج $m=2$.

پروژه ۱.۶ *برنامه‌ای بنویسید که n را دریافت کرده و قاعده ساده و مرکب نیوتن-کاتس $n+1$ نقطه‌ای باز (بسته) را همراه با جمله خطای آن بسازد.*

۳.۶ استفاده از فن برونیابی

قاعده ذوزنقه تعمیم‌یافته حالت خاصی $(m=1)$ از برابری زیر است

$$\int_0^1 x(t)dt=\frac{x(0)}{2}+\frac{x(1)}{2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(x^{(2l-1)}(0)-x^{(2l-1)}(1)\right)-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}g^{(2m+2)}(\xi),$$

که در آن $m\in\mathbb{N}$، $\xi\in(0,1)$، $x\in C^{2m+2}[0,1]$ و

$$B_2=\frac{1}{6},\ B_4=\frac{-1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=\frac{-1}{30},\ \ldots,$$

به اعداد برنولی معروف هستند (برای اثبات این برابری به صفحه 159-157 مرجع [۲۲] مراجعه کنید). برابری بیان‌شده در اصل یک قاعده انتگرال‌گیری است که قاعده مرکب نظیر آن به صورت زیر به دست می‌آید (بررسی کنید)

$$\frac{x(0)}{2}+x(1)+\cdots+x(n-1)+\frac{x(n)}{2}=\int_0^n x(t)dt+\sum_{l=1}^{m}\frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(x^{(2l-1)}(n)-x^{(2l-1)}(0)\right)+\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}nx^{(2m+2)}(\xi),$$

که در آن $\xi\in(0,n)$ و $x\in C^{2m+2}[0,n]$. این رابطه به فرمول جمعی اویلرـمکلورن[۸] معروف است.

مثال ۶.۶ *نشان دهید* $\sum_{k=0}^n k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

به کمک فرمول جمعی اویلرـمکلورن و با انتخاب $x(t)=t^3$ *داریم*

$$\frac{0}{2}+1+2^3+\cdots+(n-1)^3+\frac{n^3}{2}-\frac{B_2}{2}3n^2=\int_0^n t^3dt,$$

و در نتیجه

$$\sum_{k=0}^n k^3=\int_0^n t^3dt+\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{2}=\frac{n^4}{4}+\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{2}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$\triangle$

اگر $x\in C^{2m+2}[a,b]$، به کمک تغییر متغیر $s=\frac{b-a}{n}t+a$ و استفاده از فرمول جمعی اویلرـمکلورن با انتخاب $h=(b-a)/n$ خواهیم داشت

$$T(h)=\tau_0+\tau_1h^2+\tau_2h^4+\cdots+\tau_mh^{2m}+\alpha_{m+1}(h)h^{2m+2}, \tag{7.6}$$

که در آن $T(h)=h\left(\frac{x(s_0)}{2}+x(s_1)+\cdots+x(s_{n-1})+\frac{x(s_n)}{2}\right)$ (به طوری که $s_i=a+ih,\ i=0,\dots,n$) همان قاعده ذوزنقه مرکب است، $\tau_0=\int_a^b x(s)ds$،

$$\tau_k=\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(x^{(2k-1)}(b)-x^{(2k-1)}(a)\right),\qquad k=1,\dots,m,$$

و

$$\alpha_{m+1}(h)=\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(b-a)x^{(2m+2)}(\xi(h)),$$

که در آن $\xi(h)\in(a,b)$. به وضوح ثابت M_{m+1} چنان وجود دارد که $|\alpha_{m+1}(h)|\le M_{m+1}$. در نتیجه چون τ_k برای $k\le m$ به h بستگی ندارد پس سمت راست (۷.۶) یک بسط مجانبی است. بنابراین با کاهش h (افزایش n) جمله آخر در سمت راست رابطه (۷.۶) نسبت به سایر جملات کاهش بیشتری دارد و در نتیجه سمت راست این رابطه مانند یک چندجمله‌ای بر حسب h^2 رفتار کرده که برای $h=0$ مقدار τ_0 یعنی مقدار انتگرال را به دست می‌دهد. حال کافی است ابتدا دنباله‌ای از اندازه گام‌ها به صورت زیر انتخاب کنیم

$$h_0=\frac{b-a}{n_0},\ h_1=\frac{h_0}{n_1},\ \dots\ ,h_m=\frac{h_0}{n_m},$$

[۸] Euler-Maclaurin summation formula

که در آن $n_1,\dots,n_m$ اعداد طبیعی صعودی اکید هستند و بیشتر اوقات $n_0=1$. سپس مقادیر

$$T_{i0}=T(h_i),\qquad i=0,\dots,m,$$

را حساب کرده و سعی می‌کنیم چندجمله‌ای $p_{2m}(h)=a_0+a_1h^2+\cdots+a_mh^{2m}$ را طوری به دست آوریم که برای $i=0,\dots,m$ داشته باشیم $p_{2m}(h)=T_{i0}$. سپس با برونیابی $p_{2m}(0)$ می‌توان تقریب مناسبی برای τ_0 به دست آورد. اگر از درونیاب نویل (با انتخاب $t_i=h_i$) استفاده کنیم، رابطه بازگشتی (۳.۳) به صورت زیر ساده می‌شود

$$T_{ik}=T_{i,k-1}+\frac{T_{i,k-1}-T_{i-1,k-1}}{(h_{i-k}/h_i)^2-1}=\frac{(h_{i-k}/h_i)^2T_{i,k-1}-T_{i-1,k-1}}{(h_{i-k}/h_i)^2-1},\qquad 1\le k\le i\le m,$$

و اگر $x\in C^{2k+2}[a,b]$ ثابت می‌شود (بخش 3.5 مرجع [۲۲] را ببینید)

$$T_{ik}-\int_a^b x(s)ds=(b-a)h_{i-k}^2h_{i-k+1}^2\cdots h_i^2\frac{(-1)^kB_{2k+2}}{(2k+2)!}x^{(2k+2)}(\xi),\qquad \xi\in(a,b).$$

در عمل کافی است از رابطه بازگشتی به دست آمده استفاده کرده و جدول نویل را بسازیم. در این جدول از چپ به راست با افزایش مرتبه خطا مواجه هستیم و از بالا به پایین قاعده مرکب‌تر می‌شود (کاهش h) و در نتیجه بهترین شرط توقف عبارت است از $|T_{kk}-T_{k-1,k-1}|<\epsilon$.

تذکر ۱۲.۶ *روش انتگرال‌گیری رامبرگ[۹] که در سال 1955 ارائه شد همان قاعده ذوزنقه است که فن برونیابی (ریچاردسون) بر روی آن اعمال شده باشد و در آن*

$$h_0=b-a,\qquad h_i=\frac{h_{i-1}}{2},\quad i=1,2,\dots.$$

مثال ۷.۶ *مقدار تقریبی $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t dt$ را با روش رامبرگ به دست آورید.*
به وضوح رابطه بازگشتی نویل به صورت زیر در می‌آید

$$T_{ik}=\frac{4^kT_{i,k-1}-T_{i-1,k-1}}{4^k-1},\qquad 1\le k\le i\le m.$$

پس از محاسبه T_{i0} به کمک قاعده ذوزنقه، جدول نویل را به صورت زیر می‌سازیم

h_i	T_{i0}	T_{i1}	T_{i2}	T_{i3}
$\frac{\pi}{4}$	۰٫۹۴۸۰۶			
$\frac{\pi}{8}$	۰٫۸۹۹۰۸	۰٫۸۸۲۷۶		
$\frac{\pi}{16}$	۰٫۸۸۵۸۹	۰٫۸۸۱۴۹	۰٫۸۸۱۴۰	
$\frac{\pi}{32}$	۰٫۸۸۲۵۱	۰٫۸۸۱۳۸	۰٫۸۸۱۳۷	۰٫۸۸۱۳۷
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

[۹] Romberg

داریم

$$|T_{۳۳} - T_{۲۲}| = |۰/۸۸۱۳۷ - ۰/۸۸۱۴۰| = ۰/۳ \times ۱۰^{-۴} < ۰/۵ \times ۱۰^{-۴},$$

و با مقایسه با مقدار واقعی

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \sec t dt = (\ln(\sec t + \tan t))_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = \ln(\sqrt{۲} + ۱) = ۰/۸۸۱۳۷۳۵۸۷,$$

در می‌یابیم که

$$\left|\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \sec t dt - ۰/۸۸۱۳۷\right| < ۰/۴ \times ۱۰^{-۵}.$$

$\triangle$

تذکر ۱۳.۶ *برخی از قواعد نیوتن-کاتس در جدول رامبرگ به دست می‌آیند. به عنوان نمونه $T_{۱۱}$ قاعده سیمسون و $T_{۲۲}$ قاعده میلن (قاعده پنج نقطه‌ای نیوتن-کاتس) است ولی $T_{۳۳}$ با هیچ یک از قواعد نیوتن-کاتس برابر نیست (بررسی کنید).*

تذکر ۱۴.۶ *در روش رامبرگ پس از نصف کردن اندازه گام، تعداد بازه‌ها دو برابر می‌شود و در نتیجه تعداد ارزیابی تابع دو برابر می‌شود که در اصل نیمی از ارزیابی‌ها در مرحله قبل به دست آمده‌اند و نیازی به محاسبه مجدد آنها نیست. در واقع داریم*

$$T(h_{i+۱}) = T(\frac{h_i}{۲}) = \frac{۱}{۲}T(h_i) + h_{i+۱}(x(a+h_{i+۱}) + x(a+۳h_{i+۱}) + \cdots + x(b-h_{i+۱})).$$

بولیرش[۱۰] و همکاران در سال 1964 دنباله

$$h_{۰} = b-a,\ h_{۱} = \frac{h_{۰}}{۲},\ h_{۲} = \frac{h_{۰}}{۳}, \qquad h_i = \frac{h_{i-۱}}{۲}, \quad i = ۳, ۴, \ldots,$$

را پیشنهاد دادند که حجم محاسبات آن از یک سطر به سطر بعد به اندازه روش رامبرگ افزایش نمی‌یابد (دو برابر نمی‌شود).

تذکر ۱۵.۶ *هر زمان که یک بسط مجانبی وجود داشته باشد می‌توان از ایده برونیابی استفاده کرد. به عنوان نمونه برای برخی دیگر از قواعد نیوتن-کاتس مانند قاعده سیمسون نیز بسط مجانبی وجود دارد و می‌توان روشی مشابه روش رامبرگ ساخت. این ایده نه تنها در انتگرال‌گیری عددی بلکه در مشتق‌گیری عددی و حل عددی معادلات دیفرانسیل نیز قابل پیاده‌سازی است.*

تذکر ۱۶.۶ *به جای اینکه از درونیابی چندجمله‌ای استفاده کنیم می‌توان از سایر درونیاب‌ها مانند درونیابی گویا نیز استفاده کرد و پس از ساختن عبارت درونیاب، تقریبی از مقدار انتگرال را با برونیابی در صفر به دست آورد.*

[۱۰] Bulirsch

پروژه ۲.۶ *برنامه‌ای بنویسد که برای یک قاعده انتگرال‌گیری که دارای بسط مجانبی است، جدول نویل را برای دنباله دلخواه از اندازه گام‌ها بسازد و تقریب‌های بهتری برای یک انتگرال داده‌شده به دست آورد.*

۴.۶ قواعد گاوس

در این بخش قصد داریم مقدار تقریبی انتگرال $I = \int_a^b w(t)x(t)dt$ را به دست آوریم. $[a,b]$ یک بازه متناهی یا یک سر متناهی یا حتی دو سر نامتناهی است و w یک تابع وزن است که باید در سه شرط زیر صدق کند

- w یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی بازه $[a,b]$ باشد،
- گشتاورهای $\mu_k = \int_a^b t^k w(t)dt$ برای $k = 0, 1, \ldots$ موجود (متناهی) باشند،
- اگر برای چندجمله‌ای s که روی بازه $[a,b]$ نامنفی است، داشته باشیم $\int_a^b w(t)s(t)dt = 0$ آنگاه $s(t) = 0$.

شرایط بیان‌شده شرایط سنگینی نیستند. به عنوان نمونه اگر بازه $[a,b]$ متناهی باشد کافی است w تابعی پیوسته و مثبت روی بازه باشد. شرط سوم معادل است با اینکه $\int_a^b w(t)dt > 0$ (نشان دهید).

تعریف ۳.۶ *فضای توابع*

$$L_w^2[a,b] := \left\{ x : [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \ : \ \int_a^b w(t)x^2(t)dt < \infty \right\},$$

یک فضای ضرب داخلی است با ضرب داخلی $(x,y) := \int_a^b w(t)x(t)y(t)dt$ *و نرم القائی* $\|x\|^2 = \int_a^b w(t)x^2(t)dt$. *توابع* x *و* y *نسبت به وزن* w *متعامد نامیده می‌شوند هرگاه* $(x,y) = 0$.

قرارداد ۱.۶ *منظور از* $\bar{\mathbb{P}}_n$، *فضای چندجمله‌ای‌های درجه* n *با جمله پیشرو* t^n *است.*

قضیه ۷.۶ *چندجمله‌ای‌های* $p_j \in \bar{\mathbb{P}}_j$ *برای* $j = 0, 1, \ldots$ *چنان وجود دارند که برای* $i \neq k$ *داشته باشیم* $(p_i, p_k) = 0$. *این چندجمله‌ای‌ها به طور یکتا از رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آیند*

$$p_{i+1}(t) = (t - \delta_{i+1})p_i(t) - \gamma_{i+1}^2 p_{i-1}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{8.6}$$

که در آن $p_{-1}(t) := 0, \ p_0(t) = 1$ *و برای* $i \geq 0$ *داریم* $\delta_{i+1} = \dfrac{(tp_i, p_i)}{(p_i, p_i)}$ *و برای* $i \geq 1$ *داریم* $\gamma_{i+1}^2 = \dfrac{(p_i, p_i)}{(p_{i-1}, p_{i-1})}$.

برهان. چندجمله‌ای‌های متعامد را می‌توان به کمک فرایند گرام‌ـاشمیت (چندجمله‌ای‌های $1, t, t^2, \ldots$ را به عنوان ورودی در نظر می‌گیریم) ساخت. به وضوح $p_0(t) = 1$. فرض کنید $p_j \in \bar{\mathbb{P}}_j$ برای $0 \leq j \leq i$ چندجمله‌ای‌های متعامد ساخته‌شده به کمک فرایند باشند که در رابطه بازگشتی (۸.۶) صدق می‌کنند. نشان می‌دهیم چندجمله‌ای یکتای $p_{i+1} \in \bar{\mathbb{P}}_{i+1}$ چنان وجود دارد که

$$(p_{i+1}, p_j) = 0, \qquad 0 \leq j \leq i, \tag{9.6}$$

و در رابطه بازگشتی داده‌شده صدق می‌کنند. به وضوح هر چندجمله‌ای $p_{i+1} \in \bar{\mathbb{P}}_{i+1}$ را می‌توان به صورت یکتای زیر نوشت

$$p_{i+1}(t) = (t - \delta_{i+1})p_i(t) + c_{i-1}p_{i-1}(t) + \cdots + c_0 p_0(t).$$

چون برای $j, k \le i$ که $k \ne j$ داریم $(p_j, p_k) = 0$، برای آن که (۹.۶) برقرار باشد لازم و کافی است داشته باشیم

$$(p_{i+1}, p_i) = (tp_i, p_i) - \delta_{i+1}(p_i, p_i) = 0, \tag{۱۰.۶}$$

$$(p_{i+1}, p_{j-1}) = (tp_{j-1}, p_i) + c_{j-1}(p_{j-1}, p_{j-1}) = 0, \quad j \le i. \tag{۱۱.۶}$$

(p_i, p_i) و (p_{j-1}, p_{j-1}) صفر نیستند زیرا در غیر این صورت (بنابر شرط سوم تابع وزن) باید داشته باشیم $p_k = 0$ برای $0 \le k \le i$ که تناقضی آشکار است. بنابراین با حل معادله (۱۰.۶)، δ_{i+1} به دست می‌آید و با حل (۱۱.۶) خواهیم داشت

$$c_{j-1} = -\frac{(tp_{j-1}, p_i)}{(p_{j-1}, p_{j-1})},$$

که با جای‌گذاری $p_j(t) = (t - \delta_j)p_{j-1}(t) - \gamma_j^2 p_{j-2}(t)$ (بنابر فرض استقرا) در آن داریم

$$c_{j-1} = -\frac{(p_j + \delta_j p_{j-1} + \gamma_j^2 p_{j-2}, p_i)}{(p_{j-1}, p_{j-1})},$$

که از آنجا بنابر فرض استقرا $c_{j-1} = 0$ برای $j < i$ و $c_{i-1} = -\frac{(p_i, p_i)}{(p_{i-1}, p_{i-1})} =: -\gamma_{i+1}^2$. □

تذکر ۱۷.۶ *با انتخاب یک تابع وزن می‌توان چندجمله‌ای‌های متعامدی به دست آورد که در یک رابطه بازگشتی مرتبه دو صدق می‌کنند.*

تذکر ۱۸.۶ *واضح است که* $\mathbb{P}_n = \mathrm{Span}\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ و $p_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$.

قضیه ۸.۶ *p_n برای $n > 0$ دارای n ریشه حقیقی ساده در بازه (a, b) است.*

برهان. اگر p_n در بازه (a, b) ریشه نداشته باشد پس در این بازه تغییر علامت نمی‌دهد و $0 = (p_0, p_n) = \int_a^b w(t)p_n(t)dt$ نتیجه می‌دهد (بنابر شرط سوم تابع وزن) $p_n = 0$ که تناقضی آشکار است. حال فرض کنید ریشه‌هایی از p_n که در بازه (a, b) بوده و مرتبه فرد دارند به صورت $a < t_1 < \cdots < t_l < b$ مرتب شده باشند. اگر برای چندجمله‌ای $q(t) = \prod_{j=1}^{l}(t - t_j) \in \bar{\mathbb{P}}_l$ داشته باشیم $(q, p_n) = \int_a^b w(t)q(t)p_n(t)dt = 0$، چون چندجمله‌ای $p_n q$ در $[a, b]$ تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین (بنابر شرط سوم تابع وزن) $qp_n = 0$ که غیرممکن است و در نتیجه باید داشته باشیم $l = n$. □

گزاره ۱.۶ *برای نقاط متمایز $t_1, \ldots, t_n$ ماتریس $A = [p_{i-1}(t_j)]_{n \times n}$ وارون‌پذیر است.*

برهان. اگر A وارون‌پذیر نباشد بردار ناصفر $c^T = [c_0 \ \cdots \ c_{n-1}]$ چنان وجود دارد که $c^T A = 0$ و بنابراین چندجمله‌ای $q(t) := \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(t)$ با درجه کمتر از n دارای n ریشه $t_1, \ldots, t_n$ است و باید متحد صفر باشد و چون $p_0, \ldots, p_{n-1}$ مستقل خطی هستند (زیرا متعامدند) باید داشته باشیم $c = 0$ که تناقضی آشکار است. □

تذکر ۱۹.۶ *بنابر گزاره بیان‌شده p_iها در شرط هار صدق کرده و یک دستگاه چبیشف تشکیل می‌دهند.*

قضیه ۹.۶ *آ_ اگر $t_1,\dots,t_n$ ریشه‌های p_n باشند و $w_1,\dots,w_n$ جواب دستگاه خطی (وارون‌پذیر)*

$$\sum_{i=1}^{n} p_k(t_i)w_i = \begin{cases} (p_0,p_0), & k=0, \\ 0, & k=1,\dots,n-1, \end{cases} \tag{۱۲.۶}$$

باشند آنگاه w_iها مثبت بوده و برای هر چندجمله‌ای $p\in\mathbb{P}_{2n-1}$ خواهیم داشت

$$\int_a^b w(t)p(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i p(t_i). \tag{۱۳.۶}$$

ب_ برعکس اگر نقاط t_i و ضرایب w_i به گونه‌ای باشند که رابطه (۱۳.۶) برای هر چندجمله‌ای $p\in\mathbb{P}_{2n-1}$ برقرار باشد آنگاه نقاط، ریشه‌های چندجمله‌ای p_n بوده و ضرایب، جواب دستگاه خطی داده‌شده در قسمت آ هستند.
پ_ نقاط و ضرایب را نمی‌توان طوری به دست آورد که رابطه (۱۳.۶) برای هر چندجمله‌ای $p\in\mathbb{P}_{2n}$ برقرار باشد.

برهان. آ_ چون p_n، n ریشه حقیقی و ساده در بازه (a,b) دارد بنابر گزاره ۱.۶ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} p_0(t_1) & \cdots & p_0(t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(t_1) & \cdots & p_{n-1}(t_n) \end{bmatrix},$$

وارون‌پذیر بوده و در نتیجه دستگاه (۱۲.۶) جواب یکتا دارد. هر چندجمله‌ای $p\in\mathbb{P}_{2n-1}$ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$p(t) = p_n(t)q(t) + r(t), \tag{۱۴.۶}$$

که در آن $q,r\in\mathbb{P}_{n-1}$ و بنابر تذکر ۱۸.۶ می‌توان نوشت

$$q(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k(t), \qquad r(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k(t).$$

بنابراین با توجه به تعامد چندجمله‌ای‌ها خواهیم داشت

$$\int_a^b w(t)p(t)dt = \int_a^b w(t)(p_n(t)q(t)+r(t))dt = (p_n,q)+(r,p_0) = \beta_0(p_0,p_0).$$

از طرف دیگر چون t_iها ریشه‌های p_n هستند

$$\sum_{i=1}^{n} w_i p(t_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i r(t_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \left(\sum_{i=1}^{n} p_k(t_i)w_i\right) = \beta_0(p_0,p_0).$$

پس رابطه (۱۳.۶) برای هر چندجمله‌ای $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ برقرار است. برای هر $k = 1, \ldots, n$ با توجه به چندجمله‌ای

$$\bar{p}_k(t) = \prod_{k \neq j = 1}^{n} (t - t_j)^2 \in \mathbb{P}_{2n-2},$$

(بنابر شرط سوم تابع وزن) داریم

$$0 < \int_a^b w(t)\bar{p}_k(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{p}_k(t_i) = w_k \prod_{k \neq j = 1}^{n} (t_k - t_j)^2,$$

که دلالت بر آن دارد که w_kها مثبت هستند.

پ- اگر رابطه (۱۳.۶) برای هر چندجمله‌ای $p \in \mathbb{P}_{2n}$ برقرار باشد، برای چندجمله‌ای

$$\bar{p}(t) = \prod_{j=1}^{n} (t - t_j)^2 \in \mathbb{P}_{2n},$$

(بنابر شرط سوم تابع وزن) داریم

$$0 < \int_a^b w(t)\bar{p}(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{p}(t_i) = 0,$$

که تناقضی آشکار است.

ب- نقاط t_i دو به دو متمایز هستند چه در غیر این صورت با بازنویسی مجدد قاعده انتگرال‌گیری (۱۳.۶)، با قسمت قبل به تناقض می‌رسیم. با به کار بردن قاعده (۱۳.۶) بر روی چندجمله‌ای‌های $p = p_k$ برای $k = 0, \ldots, n-1$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n} w_i p_k(t_i) = \int_a^b w(t) p_k(t) dt = (p_k, p_0) = \begin{cases} (p_0, p_0), & k = 0, \\ 0, & 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

یعنی ضرایب $w_1, \ldots, w_n$ جواب دستگاه خطی (۱۲.۶) هستند. با به کار بردن قاعده (۱۳.۶) بر روی چندجمله‌ای‌های $p = p_n p_k$ برای $k = 0, \ldots, n-1$ داریم

$$0 = (p_n, p_k) = \int_a^b w(t) p_n(t) p_k(t) dt = \sum_{i=1}^{n} w_i p_n(t_i) p_k(t_i), \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

به بیان دیگر بردار $c^T = [w_1 p_n(t_1) \ \cdots \ w_n p_n(t_n)]$ جواب دستگاه همگن $Ac = 0$ است و چون نقاط متمایز هستند بنابر گزاره ۱.۶ ماتریس A وارون‌پذیر است و در نتیجه $c = 0$. یعنی $w_i p_n(t_i) = 0$ برای $i = 1, \ldots, n$. چون ثابت شد w_iها مثبت هستند پس باید داشته باشیم $p_n(t_i) = 0$ برای $i = 1, \ldots, n$. □

$[a,b]$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$[0,\infty]$	$[-\infty,\infty]$
$w(t)$	1	$1/\sqrt{1-t^2}$	$\sqrt{1-t^2}$	$t^\alpha e^{-t}$	e^{-t^2}
چندجمله‌ای‌های متعامد	$p_n(t)$	$T_n(t)$	$U_n(t)$	$L_n^{(\alpha)}(t)$	$H_n(t)$

انتخاب‌های پرکاربرد تابع وزن و چندجمله‌ای‌های نظیر در جدول قبلی آمده است که در آن p_n، T_n، U_n، $L_n^{(\alpha)}$ و H_n به ترتیب بیانگر چندجمله‌ای‌های لژاندر، چبیشف نوع اول، چبیشف نوع دوم، لاگور[۱۱] مرتبه $\alpha > -۱$ و هرمیت است. انتخاب رایج تابع وزن $w(t) = ۱$ روی بازه $[-۱, ۱]$ به گاوس منسوب است و چندجمله‌ای‌های متعامدی که به دست می‌آیند عبارتند از

$$p_k(t) = \frac{k!}{(۲k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^۲ - ۱)^k, \qquad k = ۰, ۱, \ldots,$$

که تنها تفاوت آنها با چندجمله‌ای‌های لژاندر در یک ضریب است و به همین دلیل قواعد ساخته‌شده به قواعد گاوس_لژاندر معروف شده‌اند. قاعده n نقطه‌ای گاوس_لژاندر عبارت است از

$$\int_{-۱}^{۱} x(t)dt \simeq \sum_{i=۱}^{n} w_i x(t_i),$$

که بنابر قضیه بیان‌شده دارای درجه دقت $۲n - ۱$ است و در آن t_iها ریشه‌های چندجمله‌ای درجه n لژاندر هستند. این چندجمله‌ای‌ها از رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آیند

$$p_{k+۱}(t) = \frac{۲k+۱}{k+۱}tp_k(t) - \frac{k}{k+۱}p_{k-۱}(t), \qquad k = ۱, ۲, \ldots,$$

که در آن $p_۰(t) = ۱,\ p_۱(t) = t$. ضرایب w_i را می‌توان از حل دستگاه خطی (۱۲.۶) به دست آورد. همچنین ثابت می‌شود

$$w_i = \int_{-۱}^{۱} \frac{p_n(t)}{(t - t_i)p_n'(t)}dt = \frac{۲(۱ - t_i^۲)}{n^۲(p_{n-۱}(t_i))^۲}, \qquad i = ۱, \ldots, n.$$

در عمل کافی است یک بار نقاط و ضرایب را به دست آورد و بارها از آنها استفاده کرد. در قاعده دو نقطه‌ای گاوس_لژاندر $w_۱ = w_۲ = ۱$ و $t_۲ = -t_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و در قاعده سه نقطه‌ای آن داریم $w_۱ = w_۳ = \frac{۵}{۹},\ w_۲ = \frac{۸}{۹}$ و $t_۳ = -t_۱ = \sqrt{\frac{۳}{۵}},\ t_۲ = ۰$. فرمول صریحی برای نقاط و ضرایب قواعد n نقطه‌ای گاوس_لژاندر برای $n > ۳$ وجود ندارد و باید به کمک نرم‌افزارها تقریب با دقتی از آنها را به دست آوریم. ثابت می‌شود ضرایب و نقاط نسبت به مبدا متقارن هستند و $۰ < w_i \le ۱$ و در نتیجه بر خلاف قواعد نیوتن_کاتس، قواعد گاوس_لژاندر را می‌توان برای nهای بزرگ نیز به کار برد و انتظار نتایج دقیق‌تری داشت، البته به شرط آن که نقاط و ضرایب با دقت خوبی به دست آمده باشند.

تذکر ۲۰.۶ *انتگرال روی بازه $[a, b]$ را می‌توان با تغییر متغیر $s = ۲\frac{t-a}{b-a} - ۱$ به بازه $[-۱, ۱]$ انتقال داد.*

در حالت کلی خطای قواعد انتگرال‌گیری بیان‌شده در این بخش به کمک قضیه زیر مشخص می‌شوند.

قضیه ۱۰.۶ *اگر $x \in C^{۲n}[a, b]$ آنگاه*

$$\int_a^b w(t)x(t)dt - \sum_{i=۱}^{n} w_i x(t_i) = \frac{x^{(۲n)}(\xi)}{(۲n)!}(p_n, p_n), \qquad \xi \in (a, b).$$

برهان. فرض کنید $p \in \mathbb{P}_{۲n-۱}$ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت ساده تابع x در نقاط $t_۱, \ldots, t_n$ باشد یعنی داشته باشیم

$$p(t_i) = x(t_i), \quad p'(t_i) = x'(t_i), \qquad i = ۱, \ldots, n.$$

[۱۱] Laguerre

چون درجه p حداکثر $2n-1$ است پس قاعده n نقطه‌ای برای آن دقیق است، یعنی

$$\int_a^b w(t)p(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i p(t_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i x(t_i),$$

و در نتیجه

$$\int_a^b w(t)x(t)dt - \sum_{i=1}^{n} w_i x(t_i) = \int_a^b w(t)(x(t)-p(t))dt.$$

حال با توجه به خطای درونیاب هرمیت و اینکه t_iها ریشه‌های p_n هستند

$$x(t)-p(t) = \frac{x^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}(t-t_1)^2\cdots(t-t_n)^2 = \frac{x^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}p_n^2(t),$$

که در آن $\eta=\eta(t)$ به بازه $[a,b]$ تعلق دارد. اما تابع $\frac{x^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} = \frac{x(t)-p(t)}{p_n^2(t)}$ روی $[a,b]$ پیوسته است و $w(t)p_n^2(t)$ در این بازه تغییر علامت نمی‌دهد و در نتیجه به کمک قضیه مقدار میانگین تعمیم‌یافته برای انتگرال داریم

$$\int_a^b w(t)(x(t)-p(t))dt = \frac{1}{(2n)!}\int_a^b w(t)x^{(2n)}(\eta(t))p_n^2(t)dt = \frac{x^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(p_n,p_n).$$

□

قضیه ۱۱.۶ *اگر بازه $[a,b]$ متناهی باشد و $x\in C[a,b]$، آنگاه قاعده n نقطه‌ای گاوس به $\int_a^b w(t)x(t)dt$ همگرا است.*

برهان. به کمک قضیه تقریب وایرشتراس به سادگی قابل بررسی است. □ اگر ضرایب رابطه بازگشتی (۸.۶) در دسترس باشند برای ساختن قاعده n نقطه‌ای، ابتدا ماتریس سه‌قطری

$$J_n = \begin{bmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & & 0 \\ \gamma_2 & \delta_2 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_{n-1} & \delta_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & & & \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix},$$

را ساخته و سپس از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۶ *نقاط $t_1,\dots,t_n$ ویژه‌مقدارهای ماتریس J_n هستند و اگر $v^{(1)},\dots,v^{(n)}$ ویژه‌بردارهای نظیر باشند ($J_n v^{(i)} = t_i v^{(i)}$) به گونه‌ای که $v^{(i)T}v^{(i)} = (p_0,p_0) = \int_a^b w(t)dt$ برای $i=1,\dots,n$ آنگاه داریم $w_i = (v_1^{(i)})^2$.*

برهان. به صفحه 179 مرجع [۲۲] مراجعه کنید. □

تذکر ۲۱.۶ *الگوریتم QR در جبرخطی عددی یک الگوریتم کارا برای یافتن ویژه‌مقدارهای یک ماتریس سه‌قطری است که در آن $v_1^{(i)}$ نیز به دست می‌آید.*

تذکر ۲۲.۶ *از بین فرمول‌های نیوتن-کاتس، روش‌های مبتنی بر برونیابی و قواعد گاوس، اگر حجم محاسبات یکسان باشد قواعد گاوس نتایج دقیق‌تری به دست می‌دهند. اگر بخواهیم n را طوری بیابیم که مقدار انتگرال داده‌شده را با دقت*

معینی به دست آوریم باز هم روش گاوس موفق‌تر از سایر روش‌ها است. البته خطای قاعده گاوس در این حالت کمکی نمی‌کند زیرا یافتن کرانی برای مشتق مرتبه $2n$ ام یک تابع به سادگی مقدور نیست. کافی است برای $n = 2, 3, \ldots$ مقدار انتگرال را به دست آورده و مقایسه کرده و اگر دقت خواسته‌شده به دست آمد، روند را متوقف کنیم. متاسفانه مقادیر محاسبه‌شده تابع در n نقطه برای محاسبه تابع در $n+1$ نقطه به کار نمی‌آیند و در نتیجه روش‌های مبتنی بر برونیابی نسبت به قواعد گاوس بهتر عمل می‌کنند. البته برای برطرف کردن این ضعف قواعد گاوسی، تلاش‌هایی نیز انجام شده است.

تذکر ۲۳.۶ *چندجمله‌ای‌های متعامد ژاکوبی که با $p^{(\alpha,\beta)}$ نمایش داده می‌شوند، روی بازه $[-1, 1]$ نسبت به تابع وزن*

$$w(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}, \qquad \alpha, \beta > -1,$$

ساخته می‌شوند و به کمک آنها می‌توان قواعد انتگرال‌گیری گاوس-ژاکوبی ساخت. قواعد گاوس-لژاندر، گاوس-چبیشف نوع اول و گاوس-چبیشف نوع دوم حالت خاصی از قواعد گاوس-ژاکوبی هستند که به ترتیب به ازای $\alpha = \beta = 0$، $\alpha = \beta = -1/2$ و $\alpha = \beta = 1/2$ به دست می‌آیند. برای جزئیات بیشتر (مانند ضرایب δ_{i+1} و γ_{i+1}^2) در مورد چندجمله‌ای‌های متعامد به مرجع سودمند [۱۰] مراجعه کنید.

پروژه ۳.۶ *برنامه‌ای بنویسید که n را دریافت کرده و قاعده n نقطه‌ای گاوس را همراه با جمله خطای آن بسازد.*

۵.۶ مطالب تکمیلی

در پایان این فصل ابتدا فن انتگرال‌گیری ضربی[۱۲] را بیان کرده و سپس به بررسی انتگرال‌های تکین[۱۳] می‌پردازیم.

۱.۵.۶ انتگرال‌گیری ضربی

در محاسبه $\int_a^b x(t)dt$ ممکن است x تابعی انتگرال‌پذیر ولی در نقطه‌ای (نقاطی) در بازه $[a,b]$ بیکران باشد یا x روی بازه $[a,b]$ به سرعت نوسان کند. متاسفانه در این مواقع نتایج قواعد انتگرال‌گیری که تا به حال مطرح شدند رضایت‌بخش نیستند و پیشنهاد می‌شود از فن انتگرال‌گیری ضربی استفاده شود. انتگرال داده‌شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$I = \int_a^b p(t)g(t)dt,$$

که در آن g بخش خوش‌رفتار بوده و p شامل بخشی است که دردسرآفرین است. حال کافی است g را با تابع ساده‌تر (مانند چندجمله‌ای) g_n تقریب زده و قرار دهیم

$$I_n = \int_a^b p(t)g_n(t)dt.$$

[۱۲] Product integration
[۱۳] Singular integrals

البته برای آن که بتوان این انتگرال را به سادگی حساب کرد لازم است p تا حد ممکن ساختار ساده‌ای داشته باشد. خوشبختانه بیشتر اوقات می‌توان به کمک این روش تقریبی از انتگرال توابع بدرفتار به دست آورد.

تذکر ۲۴.۶ *اگر*

$$L[\,] = \int_a^b p(t)[\,]dt,$$

آنگاه

$$|I - I_n| \leq \|L\| \, \|g - g_n\| \,,$$

که در آن $\|L\| \leq \int_a^b |p(t)|\, dt$ (مشروط بر آن که از نرم ماکزیمم استفاده کنیم).

برای فهم بهتر فن انتگرال‌گیری ضربی، به دو مثالی که در ادامه می‌آیند توجه کنید.

مثال ۸.۶ *انتگرال*

$$I = \int_0^1 \frac{g(t)}{\sqrt{t}} dt,$$

را در نظر بگیرید که در آن $g \in C^2[0, 1]$. برای عدد طبیعی n، اگر $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ یک افراز منظم ($t_i = ih$ برای $i = 0, \ldots, n$ که در آن $h = (b-a)/n$) روی بازه $[0, 1]$ باشد و g را با درونیاب قطعه‌ای خطی تعریف‌شده روی این افراز تقریب بزنیم، آنگاه

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{t_{i+1} - t}{h} g(t_i) + \frac{t - t_i}{h} g(t_{i+1}) \right) dt,$$

که پس از ساده‌سازی می‌توان ضرایب $w_0, \ldots, w_n$ را چنان به دست آورد که

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i).$$

قاعده به دست آمده به قاعده ذوزنقه ضربی مرکب[۱۴] *معروف است و با توجه به*

$$\|L\| = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2,$$

خطایی به صورت زیر دارد

$$|I - I_n| \leq \frac{h^2}{4} M_2,$$

که در آن $M_2 = \max_{t \in [0,1]} |g''(t)|$ (جزئیات را بررسی کنید). △

مثال ۹.۶ به نظر می‌رسد محاسبه انتگرال فوریه

$$I = \int_a^b \cos(wt) g(t) dt,$$

---

[۱۴] Composite product trapezoidal rule

به کمک قواعد استاندارد مشکلی نداشته باشد ولی اگر w عدد بزرگی باشد نوسانات انتگرالده زیاد است و نتایج خوبی به دست نمی‌آید. برای رفع این مشکل، به سراغ انتگرال‌گیری ضربی می‌رویم. به همین منظور کافی است تابع g را روی زیربازه‌های به طول $۲\pi/w$ با چندجمله‌ای‌های درجه دو تقریب زده و انتگرال‌گیری کنیم. قاعده ضربی که به این صورت به دست می‌آید به روش فیلون[۱۵] معروف است. اگر

$$L[\,] = \int_a^b \cos(wt)[\,]dt,$$

به وضوح $\|L\|_\infty \leq (b-a)$ و ثابت می‌شود روش فیلون مرکب خطایی حداقل از مرتبه سه دارد. برای جزئیات بیشتر به صفحه 66-59 مرجع [۹] مراجعه کنید. $\triangle$

۲.۵.۶ انتگرال‌های تکین

در محاسبه تقریبی $I = \int_a^b x(t)dt$ به کمک روش‌های بیان‌شده، بیشتر مواقع باید تابع x به اندازه کافی هموار (مشتق‌پذیر) باشد. متاسفانه در بسیاری از مسایل کاربردی تابع x در نقاط انتهایی بازه $[a,b]$ و یا در نقطه (نقاطی) از بازه مشتق‌پذیر نیست و به کار بردن مستقیم قواعد متداول، به نتایج رضایت‌بخشی منجر نمی‌شود. در ادامه این بخش چند راه‌کار ارائه می‌شود.

- ایجاد یک افراز مناسب روی بازه $[a,b]$ و شکستن انتگرال به مجموع چند انتگرال روی زیربازه‌ها و استفاده از قواعد متداول روی زیربازه‌ها بیشتر مواقع راه‌گشا است،

- بعضی مواقع تغییر متغیر مشکل انتگرالده را برطرف می‌کند. به عنوان مثال تغییر متغیر $\sqrt{t} =: s$، مشکل مشتق‌ناپذیری تابع $x(t) = \sqrt{t}\sin t$ در $t = ۰$ را برطرف می‌کند،

$$\int_۰^b \sqrt{t}\sin t dt = \int_۰^{\sqrt{b}} ۲s^۲ \sin s^۲ ds,$$

- بعضی مواقع استفاده از بسط تیلور انتگرالده یا بخشی از آن و ساده‌سازی انتگرال سودمند است. به عنوان نمونه برای مثالی که در قسمت قبل بیان شد داریم

$$\int_۰^b \sqrt{t}\sin t dt = \int_۰^\epsilon \sqrt{t}\sin t dt + \int_\epsilon^b \sqrt{t}\sin t dt, \qquad \epsilon > ۰.$$

برای محاسبه انتگرال دوم مشکلی نیست و برای انتگرال اول داریم

$$\int_۰^\epsilon \sqrt{t}\sin t dt = \int_۰^\epsilon \sqrt{t}\left(t - \frac{t^۳}{۳!} + \frac{t^۵}{۵!} - + \cdots\right) dt = \sum_{k=۰}^\infty (-۱)^k \frac{\epsilon^{۲k+۵/۲}}{(۲k+۱)!(۲k+۵/۲)}.$$

باید ϵ را با احتیاط انتخاب کرد زیرا هرچه ϵ کوچک‌تر باشد جملات کمتری از سری به دست آمده نیاز است حال آن که همگرایی انتگرال دوم از دست می‌رود (انتگرال دوم به تکینگی نزدیک می‌شود)،

---

[۱۵] Filon's method

- بعضی مواقع با اضافه و کم کردن یک تابع مناسب (تابعی که تابع اولیه آن به راحتی به دست آید) می‌توان هموار‌ی (مشتق‌پذیری) انتگرالده را بالا برد. همان مثال قبل را در نظر بگیرید

$$\int_0^b \sqrt{t}\sin t dt = \int_0^b (\sqrt{t}\sin t - t\sqrt{t})dt + \int_0^b t\sqrt{t}dt = \int_0^b \sqrt{t}(\sin t - t)dt + \frac{2}{5}b^{5/2}.$$

انتگرال به دست آمده دارای انتگرالده به طور پیوسته مشتق‌پذیر تا مرتبه سه است و نسبت به انتگرالده اصلی همواری بیشتری دارد. برای محاسبه انتگرال جدید با یک قاعده انتگرال‌گیری مناسب، ممکن است پدیده از بین رفتن ارقام با معنا (به دلیل تفاضل دو عدد نزدیک به هم) اتفاق افتد که می‌توان آن را به کمک بسط تیلور مهار کرد،

$$\sqrt{t}(\sin t - t) = \sqrt{t}(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - + \cdots - t) = -t^{7/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+3)!}t^{2k},$$

- در محاسبه انتگرال $\int_a^b t^\alpha x(t)dt$ که در آن $0 < \alpha < 1$، ممکن است انتگرالده به اندازه کافی مشتق‌پذیر نباشد (حتی اگر x به اندازه کافی مشتق‌پذیر باشد) و در نتیجه بسط مجانبی (۷.۶) برقرار نیست. ثابت می‌شود

$$T(h) = \tau_0 + \tau_1 h^{\gamma_1} + \tau_2 h^{\gamma_2} + \cdots,$$

که در آن $\{\gamma_i\} = \{1+\alpha, 2, 2+\alpha, 4, 4+\alpha, 6, 6+\alpha, \ldots\}$. با انتخاب مناسب یک دنباله از اندازه گام‌ها می‌توان از برونیابی استفاده کرد. برای جزئیات بیشتر به مرجع [۲۲] مراجعه کنید،

- زمانی که تابع x در نقطه $t = a$ به اندازه کافی مشتق‌پذیر نیست، با تعریف

$$a_j := a + \frac{b-a}{j}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

و محاسبه (به کمک روش‌های متداول) $I_j = \int_{a_{j+1}}^{a_j} x(t)dt$ قرار می‌دهیم $I = I_1 + I_2 + \cdots$. این روش برای محاسبه انتگرال ناسره $\int_a^\infty x(t)dt$ نیز کاربرد دارد،

- بسیاری از انتگرال‌های ناسره را می‌توان به کمک تغییر متغیر به انتگرال سره تبدیل کرد. به عنوان نمونه

$$\int_1^\infty x(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{s^2}x(1/s)ds.$$

- تقریبی از انتگرال‌های ناسره $\int_0^\infty x(t)dt$ و $\int_{-\infty}^\infty x(t)dt$ را می‌توان به ترتیب به کمک قواعد گاوس‌ـلاگر و گاوس‌ـهرمیت به دست آورد.

سمینار ۱.۶ *انتگرال‌گیری تطبیقی (وفقی)*[۱۶].

سمینار ۲.۶ *انتگرال‌های چندگانه*.

---
[۱۶] Adaptive integration

کتاب‌نامه

[۱] بهفروز غلامحسین و میرنیا میرکمال، نظریه و کاربرد آنالیز عددی، نوشته تیلور و دیگران (ترجمه)، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۳.

[۲] عالم‌زاده علی اکبر، بابلیان اسماعیل و امیدوار محمدرضا، آنالیز عددی، نوشته بردن و دیگران (ترجمه)، انتشارات منصوری، ۱۳۶۸.

[3] American Heritage Dictionary, 1992.

[4] Bauer F. L., Computational graphs and rounding error, SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974) 87-96.

[5] Blum E. K., Trefethen L. N., Barycentric Lagrange interpolation, SIAM Review 46 (2004) 501-517.

[6] Chambers 20th Century Dictionary, 1983.

[7] Cheney K., Approximation theory, 2000.

[8] Davis P. J., Interpolation and Approximation, Blaisedell, New York, 1963.

[9] Davis P. J., Rabinowitz, Numerical Integration, Blaisedell, Waltham, MA, 1967.

[10] Gautschi W., Orthogonal Polynomials Computation and Approximation, Oxford University Press, 2004.

[11] Higham N. J., The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation, IMA J. Numer. Anal. 24 (2004) 547-556.

[12] Henrichi P., Elements of numerical analysis, 1964.

[13] Isaacson E. and Keller H. B., Analysis of Numerical Methods, Wiley, New York, 1966.

[14] Kincaid D. and Cheney E. W., Numerical analysis, Mathematics of scientific computing, 1991.

[15] Linz P., Theoretical of Numerical Analysis, 1987.

[16] Prenter P.M., Splines and Vriational Methods,Wiley-Interscience, New York, 1975.

[17] Quarteroni, Numerical Mathematics, 2007.

[18] Moore R. E., Interval Arithmetic.

[19] Reddy J. N., Introduction to Finite Element Method.

[20] Rivlin T., Approximation and interpolation.

[21] Scarborough J.B., Numerical Mathematical Analysis, 1930.

[22] Stoer J., Bulirsch R., Introduction to Numerical Analysis, 3rd edition, 2003.

[23] Traub J., Communications of the ACM, 1972.

[24] Trefethen L. N., SIAM News, November 1992.

[25] Webster's New Collegiate Dictionary, 1973.