فصل ۳

حل عددی معادلات دیفرانسیل عادی

معادله $y' = f(x, y)$ یک معادله دیفرانسیل عادی (معمولی) مرتبه اول نامیده می‌شود و در آن $f(x, y)$ یک تابع حقیقی دو متغیره است که به ازای هر x در $[a, b]$ و تمامی yهای حقیقی تعریف شده است (فرض می‌شود $y = y(x)$ تابعی حقیقی تعریف شده بر $[a, b]$ باشد). این معادله همراه با شرط $y(a) = \alpha$ (یا $y(x_۰) = y_۰$) که به شرط اولیه معروف است را یک مسئله مقدار اولیه[1] می‌نامند.

مثال ۱.۳ *مسئله مقدار اولیه*

$$\begin{cases} y' = ۱ + x\sin(xy), & x \in [۰, ۲], \\ y(۰) = ۰, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. با آن که ثابت می‌شود (به [۲] مراجعه شود) این مسئله مقدار اولیه جواب یکتا دارد، ولی به کمک روش‌های معمول نمی‌توان آن را به دست آورد. △

به دلیل مشکلات موجود در حل تحلیلی[2] چنین مسایلی (نداشتن دسترسی به جواب تحلیلی یا پیچیدگی حل تحلیلی)، به بررسی روش‌های عددی در حل آن‌ها می‌پردازیم. در این راستا قصد داریم در این فصل ابتدا روش بسط تیلور و روش‌های رانگ-کوتا را مرور کرده و در آخر، این روش‌ها را برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر به کار گیریم.

در این روش‌ها پس از اختیار نمودن عدد کوچک h (اندازه گام) و با فرض $x_۰ = a$، به ازای $i = ۰, ۱, ۲, \ldots$ قرار می‌دهیم $x_i = x_۰ + ih$. سپس y_i به عنوان تقریبی از $y(x_i)$ در نظر گرفته می‌شود. واضح است که تفاوت این روش‌ها در نحوه ساختن y_i است. به شکل ۱.۳ توجه کنید.

۱.۳ روش بسط تیلور

به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت

$$y(x_{i+۱}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^۲}{۲!}y''(x_i) + \cdots + \frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_i) + \frac{h^{p+۱}}{(p+۱)!}y^{(p+۱)}(z) \qquad (۱.۳)$$

[1] initial value problem (IVP)

[2] راه حلی که به جواب دقیق می‌انجامد.

که در آن z بین x_i و $x_{i+۱}$ قرار دارد. اگر $y' = f(x, y)$ را به صورت دقیق‌تر $y' = f(x, y(x))$ بنویسیم آن‌گاه

$$y''(x) = \frac{d}{dx}(y'(x)) = \frac{d}{dx}f(x, y) = \frac{dx}{dx}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial f}{\partial y} = f_x + y'f_y = f_x + ff_y.$$

شکل ۱.۳: تعبیر هندسی حل عددی معادلات دیفرانسیل

حال با فرض $f^{(۰)}(x, y) = f(x, y)$، اگر برای $r \geq ۱$ تعریف کنیم

$$f^{(r)}(x, y) = {f_x}^{(r-۱)}(x, y) + f(x, y){f_y}^{(r-۱)}(x, y)$$

آن‌گاه با استقرا روی r می‌توان ثابت نمود $y^{(r+۱)}(x) = f^{(r)}(x, y(x))$. بنابراین (۱.۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$y(x_{i+۱}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^۲}{۲!}f^{(۱)}(x_i, y(x_i)) + \cdots + \frac{h^p}{p!}f^{(p-۱)}(x_i, y(x_i)) + \frac{h^{p+۱}}{(p+۱)!}f^{(p)}(z, y(z)).$$

با صرف نظر کردن از جمله باقیمانده، روش تیلور مرتبه p به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases} y_{i+۱} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^۲}{۲!}f^{(۱)}(x_i, y_i) + \cdots + \frac{h^p}{p!}f^{(p-۱)}(x_i, y_i), & i = ۰, ۱, ۲, \ldots, \\ y_۰ = \alpha. \end{cases}$$

عیب اصلی این روش محاسبه $f^{(r)}(x, y)$ است. به عنوان مثال برای $r = ۲$ داریم

$$f^{(۲)} = f_x^{(۱)} + ff_y^{(۱)} = f_{xx} + ۲ff_{xy} + f^۲f_{yy} + (f_x + ff_y)f_y.$$

مثال ۲.۳ *به کمک روش تیلور و با انتخاب $h = ۰/۱$ تقریبی با دقت $۴D$ از $y(۰/۵)$ برای مسئله داده‌شده ارایه دهید.*

$$y' = x + y, \qquad y(۰) = ۱.$$

داریم

$$\begin{aligned} &y' = x + y, && y'' = ۱ + y' = ۱ + x + y, \\ &y''' = ۱ + y' = ۱ + x + y, && y^{(۴)} = ۱ + y' = ۱ + x + y = y^{(۵)} = \cdots. \end{aligned}$$

بنابراین به ازای $i=۰,۱,۲,۳,\ldots$ *خواهیم داشت*

$$y(x_{i+۱})\simeq y_{i+۱}=y_i+h(x_i+y_i)+\frac{h^۲}{۲!}(۱+x_i+y_i)+\frac{h^۳}{۳!}(۱+x_i+y_i)+\frac{h^۴}{۴!}(۱+x_i+y_i)+\cdots.$$

حال برای $i=۰,۱,۲,\ldots$ *قرار می‌دهیم* $x_i=\frac{i}{۱۰}$. *به عنوان نمونه با انتخاب پنج جمله (روش تیلور مرتبه چهار) از عبارت اخیر خواهیم داشت*

$$y_{i+۱}=۰/۰۰۵۱۷+۰/۱۰۵۱۷x_i+۱/۱۰۵۱۷y_i,\qquad i=۰,۱,\ldots,$$

و از آن‌جا داریم

$$y_۱=۱/۱۱۰۳۴,\quad y_۲=۱/۲۴۲۸۰,\quad y_۳=۱/۳۹۹۷۱,\quad y_۴=۱/۵۷۳۶۴,\quad y_۵=۱/۷۹۷۴۳.$$

از طرفی جواب واقعی این مسئله $y(x)=۲e^x-x-۱$ *است و بنابراین* $y(۰/۵)=۱/۷۹۷۴۴$ *و در نتیجه خطایی حدود* ۰/۰۰۰۰۱ *مرتکب شده‌ایم.* △

مثال ۳.۳ *برای معادله* $y'=\frac{۱}{۱+y^۲}$ *با شرط اولیه* $y(۰)=۱$ *داریم*

$$f(x,y)=\frac{۱}{۱+y^۲},\quad f^{(۱)}(x,y)=f_x+ff_y=\frac{-۲y}{(۱+y^۲)^۳},\quad f^{(۲)}(x,y)=\frac{۲(۵y^۲-۱)}{(۱+y^۲)^۵}.$$

بنابراین برای $p=۳$ *خواهیم داشت*

$$\begin{cases} y_{i+۱}=y_i+\dfrac{h}{۱+y_i^۲}+\dfrac{h^۲}{۲!}\dfrac{-۲y_i}{(۱+y_i^۲)^۳}+\dfrac{h^۳}{۳!}\dfrac{۲(۵y_i^۲-۱)}{(۱+y_i^۲)^۵}, & i=۰,۱,\ldots,\\ y_۰=۱. \end{cases}$$

△

تذکر ۱.۳ *در روش تیلور مرتبه* p *هر چه* p *بزرگ‌تر باشد دقت روش بیشتر است (خطای کل از مرتبه* $O(h^p)$ *است) ولی محاسبه جملات* $f^{(r)}(x,y)$ *برای* $r=۱,۲,۳,\ldots,p$ *ممکن است بسیار مشکل و زمان‌گیر باشد؛ برای پرهیز از این مشکل به روش‌های اویلر و رانگ_کوتا پناه می‌بریم.*

۲.۳ روش اویلر

روش اویلر همان روش تیلور مرتبه یک با خطایی از مرتبه $O(h)$ بوده و طرح تفاضلی آن به صورت زیر است

$$\begin{cases} y_{i+۱}=y_i+hf(x_i,y_i), & i=۰,۱,\ldots,\\ y(x_۰)=\alpha. \end{cases}$$

مثال ۴.۳ *برای حل مسئله*

$$\begin{cases} y' = y - x^{۲} + ۱, \quad x \in [۰, ۲], \\ y(۰) = ۰٫۵, \end{cases}$$

فاصله $[۰, ۲]$ را به ده قسمت مساوی تقسیم کرده و به کمک روش اویلر مقادیر تقریبی $y_{۱}, \ldots, y_{۱۰}$ را مشخص کنید. با انتخاب $n = ۱۰$ داریم $h = \frac{b-a}{۱۰} = \frac{۲-۰}{۱۰} = ۰٫۲$ و بنابراین به ازای $i = ۰, ۱, \ldots, ۱۰$ خواهیم داشت $x_i = x_۰ + ih = ۰٫۲i$. از طرفی چون $y_{i+۱} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + h(y_i - x_i^{۲} + ۱)$، پس طرح تکراری به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} y_{i+۱} = ۱٫۲y_i - ۰٫۰۰۸i^{۲} + ۰٫۲, \quad i = ۰, ۱, \ldots, ۹, \\ y_۰ = y(۰) = ۰٫۵. \end{cases}$$

جواب‌های تقریبی به دست آمده با جواب واقعی $y(x) = (x + ۱)^{۲} - ۰٫۵e^x$ در جدول ۱.۳ مقایسه شده‌اند. چون h چندان کوچک نیست و مرتبه خطای روش پایین است، خطاها رضایت‌بخش نیستند. $\triangle$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
۰٫۰	۰٫۵۰۰۰۰۰۰	۰٫۵۰۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۰
۰٫۲	۰٫۸۰۰۰۰۰۰	۰٫۸۲۹۲۹۸۶	۰٫۰۲۹۲۹۸۶
۰٫۴	۱٫۱۵۲۰۰۰۰	۱٫۲۱۴۰۸۷۷	۰٫۰۶۲۰۸۷۷
۰٫۶	۱٫۵۵۰۴۰۰۰	۱٫۶۴۸۹۴۰۶	۰٫۰۹۸۵۴۰۶
۰٫۸	۱٫۹۸۸۴۸۰۰	۲٫۱۲۷۲۲۹۵	۰٫۱۳۸۷۴۹۵
۱٫۰	۲٫۴۵۸۱۷۶۰	۲٫۶۴۰۸۵۹۱	۰٫۱۸۲۶۸۳۱
۱٫۲	۲٫۹۴۹۸۱۱۲	۳٫۱۷۹۹۴۱۵	۰٫۲۳۰۱۳۰۳
۱٫۴	۳٫۴۵۱۷۷۳۴	۳٫۷۳۲۴۰۰۰	۰٫۲۸۰۶۲۶۶
۱٫۶	۳٫۹۵۰۱۲۸۱	۴٫۲۸۳۴۸۳۸	۰٫۳۳۳۳۵۵۷
۱٫۸	۴٫۴۲۸۱۵۳۸	۴٫۸۱۵۱۷۶۳	۰٫۳۸۷۰۲۲۵
۲٫۰	۴٫۸۶۵۷۸۴۵	۵٫۳۰۵۴۷۲۰	۰٫۴۳۹۶۸۷۴

جدول ۱.۳: مقایسه روش اویلر با جواب واقعی

۳.۳ روش‌های رانگ-کوتا

حدود ۱۰۰ سال پیش دو ریاضیدان آلمانی به نام‌های رانگ[3] و کوتا[4] برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی روش‌هایی ارایه دادند که نیازی به محاسبه مشتق‌های y نداشته و تنها با ارزیابی تابع f جواب‌های تقریبی خوبی تولید می‌کنند. روش رانگ-کوتای r مرحله‌ای، در اصل یک طرح تفاضلی است که برای محاسبه $y_{i+۱}$ باید f در r نقطه ارزیابی شود.

[3] C. Runge
[4] M. W. Kutta

جهت شناختن بهتر این روش‌ها، ابتدا طرح تفاضلی رانگ_کوتای دو مرحله‌ای (RK2) را بررسی می‌کنیم. RK2 همانند روش تیلور مرتبه دو است که خطایی از مرتبه $O(h^۲)$ دارد و در آن برای $i = ۰, ۱, \ldots$ قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} K_۱ = hf(x_i, y_i), \\ K_۲ = hf(x_i + h, y_i + K_۱), \\ y_{i+۱} = y_i + \frac{۱}{۲}(K_۱ + K_۲), \end{cases}$$

و یا

$$y_{i+۱} = y_i + \frac{h}{۲}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))).$$

روش رانگ_کوتای دو مرحله‌ای به روش اویلر اصلاح‌شده (تعمیم‌یافته ـ تغییریافته ـ ترمیم‌یافته)[5] نیز معروف است.

مثال ۵.۳ *مسئله زیر را در نظر بگیرید.*

$$\begin{cases} y' = y - x^۲ + ۱, \qquad x \in [۰, ۲], \\ y(۰) = ۰/۵. \end{cases}$$

با انتخاب $n = ۱۰$ خواهیم داشت $h = ۰/۲$ و برای $i = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰$ داریم $x_i = ۰/۲i$. طرح تفاضلی اویلر اصلاح‌شده به صورت زیر ساده می‌شود

$$y_{i+۱} = ۱/۲۲y_i - ۰/۰۰۸۸i^۲ - ۰/۰۰۸i + ۰/۲۱۶.$$

نتایج در جدول ۲.۳ آورده شده است. △

x_i	$y(x_i)$	RK2	خطا
۰/۰۰۰	۰/۵۰۰	۰/۵۰۰	۰/۰۰۰
۰/۲۰۰	۰/۸۲۹	۰/۸۲۶	۰/۰۰۳
۰/۴۰۰	۱/۲۱۴	۱/۲۰۷	۰/۰۰۷
⋮	⋮	⋮	⋮
۱/۰۰۰	۲/۶۴۱	۲/۶۱۸	۰/۰۲۳
⋮	⋮	⋮	⋮
۲/۰۰۰	۵/۳۰۵	۵/۲۳۳	۰/۰۷۲

جدول ۲.۳: مقایسه نتایج روش اویلر اصلاح‌شده (RK2) با جواب دقیق

[5] modified Euler method

طرح تفاضلی رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای (RK4) که خطای آن از مرتبه $O(h^۴)$ است، از دیگر روش‌های پرکاربرد رانگ-کوتا بوده و در آن برای $i = ۰, ۱, ۲, \ldots$ قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} K_۱ = hf(x_i, y_i), \\ K_۲ = hf(x_i + \frac{h}{۲}, y_i + \frac{K_۱}{۲}), \\ K_۳ = hf(x_i + \frac{h}{۲}, y_i + \frac{K_۲}{۲}), \\ K_۴ = hf(x_i + h, y_i + K_۳), \\ y_{i+۱} = y_i + \frac{۱}{۶}(K_۱ + ۲K_۲ + ۲K_۳ + K_۴). \end{cases}$$

مثال ۶.۳ *با به کار بردن طرح تفاضلی رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای بر روی مسئله*

$$\begin{cases} y' = y - x^۲ + ۱, \qquad x \in [۰, ۲], \\ y(۰) = ۰/۵, \end{cases}$$

و با انتخاب $n = ۱۰$، نتایج جدول ۳.۳ به دست می‌آید. △

x_i	$y(x_i)$	RK4	خطا
۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۵۰۰۰۰۰۰	۰/۵۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰
۰/۲۰۰۰۰۰۰	۰/۸۲۹۲۹۸۶	۰/۸۲۹۲۹۳۳	۰/۰۰۰۰۰۵۳
۰/۴۰۰۰۰۰۰	۱/۲۱۴۰۸۷۷	۱/۲۱۴۰۷۶۲	۰/۰۰۰۰۱۱۴
⋮	⋮	⋮	⋮
۱/۰۰۰۰۰۰۰	۲/۶۴۰۸۵۹۱	۲/۶۴۰۸۲۲۷	۰/۰۰۰۰۳۶۴
⋮	⋮	⋮	⋮
۲/۰۰۰۰۰۰۰	۵/۳۰۵۴۷۲۰	۵/۳۰۵۳۶۳۰	۰/۰۰۰۱۰۸۹

جدول ۳.۳: روش رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای

۴.۳ دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در حالت کلی به صورت زیر است

$$\begin{cases} u_۱'(x) = f_۱(x, u_۱(x), \ldots, u_n(x)), \quad u_۱(x_۰) = u_{۱۰}, \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ u_n'(x) = f_n(x, u_۱(x), \ldots, u_n(x)), \quad u_n(x_۰) = u_{n۰}, \end{cases} \tag{۲.۳}$$

که در آن مشتق نسبت به متغیر مستقل x است و $u_1, \dots, u_n$ توابع مجهول بر حسب متغیر مستقل x و $u_{10}, \dots, u_{n0}$ مقادیر اولیه معلوم هستند.

مثال ۷.۳ *به عنوان نمونه در زیر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۲ × ۲ غیرخطی (سمت چپ) و یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۳ × ۳ خطی (سمت راست) ارایه شده است.* △

$$\begin{cases} u'(x) = v^2(x), & u(0) = 0 \\ v'(x) = -u(x), & v(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1'(x) = u_2(x) - u_3(x) + x, & u_1(0) = 1 \\ u_2'(x) = 3x^2, & u_2(0) = 1 \\ u_3'(x) = u_2(x) + e^{-x}, & u_3(0) = -1 \end{cases}$$

قضیه ۱.۳ *اگر f_i برای $i = 1, \dots, n$ روی $D = \{(x, u_1, \dots, u_n) | a \le x \le b,\ u_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ پیوسته و نسبت به متغیرهای دوم تا آخر در شرط لیپشیتس با ثابت‌های لیپشیتس L_i صدق کند، آن‌گاه دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (۲.۳) جواب یکتا دارد.*

برهان. به صفحات 154-152 مرجع [۱] مراجعه شود. □

تذکر ۲.۳ *به کمک قضیه مقدار میانگین ثابت می‌شود (صفحه 141 مرجع [۱])، اگر f_i و مشتقات جزئی مرتبه اول آن روی D پیوسته باشند و روی D داشته باشیم*

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right| \le L_i, \qquad j = 1, \dots, n,$$

آن‌گاه f_i نسبت به متغیرهای دوم تا آخر در شرط لیپشیتس با ثابت‌های لیپشیتس L_i صدق می‌کند.

در ادامه با استفاده از تعمیم روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، روش‌هایی برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (۲.۳) ارایه می‌کنیم.

۱.۴.۳ روش اویلر

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (۲.۳) به کمک روش اویلر، یا می‌توان روش را به صورت برداری بازنویسی کرد یا آن را به طور همزمان بر روی تمامی معادلات دستگاه به کار برد. برای دنبال کردن ایده اول کافی است بنویسیم

$$U_{i+1} = U_i + hF(x_i, U_i), \qquad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

که در آن $U_i = [u_{1i}, \dots, u_{mi}]^T$ تقریبی برای $[u_1(x_i), \dots, u_m(x_i)]^T$ است، U_0 بردار اولیه است و

$$F(x_i, U_i) = \begin{bmatrix} f_1(x_i, u_{1i}, \dots, u_{mi}) \\ \vdots \\ f_m(x_i, u_{1i}, \dots, u_{mi}) \end{bmatrix}.$$

برای دنبال کردن ایده دوم به عنوان نمونه برای دستگاه ۲ × ۲

$$\begin{cases} u'(x) = f_1(x, u(x), v(x)), & u(x_0) = u_0, \\ v'(x) = f_2(x, u(x), v(x)), & v(x_0) = v_0, \end{cases} \tag{۳.۳}$$

با انتخاب u_i و v_i به عنوان مقدار تقریبی $u(x_i)$ و $v(x_i)$، می‌توان نوشت

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + hf_1(x_i, u_i, v_i), \\ v_{i+1} = v_i + hf_2(x_i, u_i, v_i), \end{cases} \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$

و برای دستگاه ۳ × ۳

$$\begin{cases} u'(x) = f_1(x, u(x), v(x), w(x)), & u(x_0) = u_0, \\ v'(x) = f_2(x, u(x), v(x), w(x)), & v(x_0) = v_0, \\ w'(x) = f_3(x, u(x), v(x), w(x)), & w(x_0) = w_0, \end{cases} \tag{۴.۳}$$

با انتخاب u_i، v_i و w_i به عنوان مقدار تقریبی $u(x_i)$، $v(x_i)$ و $w(x_i)$، خواهیم داشت

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + hf_1(x_i, u_i, v_i, w_i), \\ v_{i+1} = v_i + hf_2(x_i, u_i, v_i, w_i), \\ w_{i+1} = w_i + hf_3(x_i, u_i, v_i, w_i) \end{cases} \qquad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

مثال ۸.۳ *در دستگاه‌های زیر به ترتیب مقادیر $u(0/1)$ و $v(0/1)$ را برای دستگاه ۲ × ۲ و $u(0/2)$، $v(0/2)$ و $w(0/2)$ را برای دستگاه ۳ × ۳ به کمک روش اویلر به دست آورید.*

$$\begin{cases} u'(x) = v(x), & u(0) = 0 \\ v'(x) = -u(x), & v(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = v(x) - w(x) + x, & u(0) = 1 \\ v'(x) = -u(x), & v(0) = 1 \\ w'(x) = v(x) + e^{-x}, & w(0) = -1 \end{cases}$$

برای دستگاه ۲ × ۲ داریم $f_1(x_i, u_i, v_i) = v_i$ *و* $f_2(x_i, u_i, v_i) = -u_i$. *بنابراین برای* $h = 0/1$ *خواهیم داشت*

$$u_{i+1} = u_i + 0/1 v_i, \qquad v_{i+1} = v_i - 0/1 u_i.$$

برای دستگاه ۳×۳ داریم $f_1(x_i, u_i, v_i, w_i) = v_i - w_i + x_i$، $f_2(x_i, u_i, v_i, w_i) = -u_i$ *و* $f_3(x_i, u_i, v_i, w_i) = v_i + e^{-x_i}$. *بنابراین برای* $h = 0/2$ *خواهیم داشت*

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + 0/2(v_i - w_i + x_i), \\ v_{i+1} = v_i - 0/2 u_i, \\ w_{i+1} = w_i + 0/2(v_i + e^{-x_i}), \end{cases}$$

پس به ازای $i = ۰$ برای دستگاه ۲ × ۲ نتایج زیر به دست می‌آیند

$$\begin{cases} u(۰/۱) \simeq u_۱ = u_۰ + ۰/۱ v_۰ = ۰ + ۰/۱ = ۰/۱, \\ v(۰/۱) \simeq v_۱ = v_۰ - ۰/۱ u_۰ = ۱ - ۰ = ۱, \end{cases}$$

و برای دستگاه ۳ × ۳ داریم

$$\begin{cases} u(۰/۲) \simeq u_۰ + ۰/۲(v_۰ - w_۰ + x_۰) = ۱ + ۰/۲(۱ + ۱ + ۰) = ۱/۴, \\ v(۰/۲) \simeq v_۰ - ۰/۲ u_۰ = ۱ - ۰/۲ = ۰/۸, \\ w(۰/۲) \simeq w_۰ + ۰/۲(v_۰ + e^{-x_۰}) = -۱ + (۰/۲)(۱ + ۱) = -۰/۹۶, \end{cases}$$

$\triangle$

۲.۴.۳ روش اویلر پیراسته

در این‌جا باید روش اویلر پیراسته را به طور همزمان برای تمامی معادلات دستگاه به کار ببریم. به عنوان مثال برای دستگاه (۳.۳)، خواهیم داشت

$$\begin{cases} u_{i+۱} = u_i + \frac{h}{۲}\big(f_۱(x_i, u_i, v_i) + f_۱(x_{i+۱}, u^*_{i+۱}, v^*_{i+۱})\big), \\ v_{i+۱} = v_i + \frac{h}{۲}\big(f_۲(x_i, u_i, v_i) + f_۲(x_{i+۱}, u^*_{i+۱}, v^*_{i+۱})\big), \end{cases}$$

که در آن $u^*_{i+۱} = u_i + hf_۱(x_i, u_i, v_i)$ و $v^*_{i+۱} = v_i + hf_۲(x_i, u_i, v_i)$. هم‌چنین برای دستگاه (۴.۳)، می‌توان نوشت

$$\begin{cases} u_{i+۱} = u_i + \frac{h}{۲}\big(f_۱(x_i, u_i, v_i, w_i) + f_۱(x_{i+۱}, u^*_{i+۱}, v^*_{i+۱}, w^*_{i+۱})\big), \\ v_{i+۱} = v_i + \frac{h}{۲}\big(f_۲(x_i, u_i, v_i, w_i) + f_۲(x_{i+۱}, u^*_{i+۱}, v^*_{i+۱}, w^*_{i+۱})\big), \\ w_{i+۱} = w_i + \frac{h}{۲}\big(f_۳(x_i, u_i, v_i, w_i) + f_۳(x_{i+۱}, u^*_{i+۱}, v^*_{i+۱}, w^*_{i+۱})\big), \end{cases}$$

که در آن داریم

$$u^*_{i+۱} = u_i + hf_۱(x_i, u_i, v_i, w_i), \quad v^*_{i+۱} = v_i + hf_۲(x_i, u_i, v_i, w_i), \quad w^*_{i+۱} = w_i + hf_۳(x_i, u_i, v_i, w_i).$$

مثال ۹.۳ *می‌خواهیم مثال قبل را به کمک روش اویلر پیراسته حل کنیم. بنابر روش اویلر پیراسته برای دستگاه ۲ × ۲*

خواهیم داشت

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(v_i + v^*_{i+1}), \\ v_{i+1} = v_i + \frac{h}{2}(-u_i - u^*_{i+1}), \end{cases}$$

که در آن $u^*_{i+1} = u_i + hv_i$ و $v^*_{i+1} = v_i - hu_i$. بنابراین برای $h = 0/1$ داریم

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + 0/05(v_i + v_i - 0/1u_i) = 0/995u_i + 0/1v_i, \\ v_{i+1} = v_i + 0/05(-u_i - u_i - 0/1v_i) = -0/1u_i + 0/995v_i. \end{cases}$$

پس به ازای $i = 0$ برای دستگاه 2×2 نتایج زیر به دست می‌آیند

$$\begin{cases} u(0/1) \simeq 0/995u_0 + 0/1v_0 = 0/1, \\ v(0/1) \simeq -0/1u_0 + 0/995v_0 = 0/995. \end{cases}$$

برای دستگاه 3×3 داریم

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(v_i - w_i + x_i + v^*_{i+1} - w^*_{i+1} + x_{i+1}), \\ v_{i+1} = v_i + \frac{h}{2}(-u_i - u^*_{i+1}), \\ w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}(v_i + e^{-x_i} + v^*_{i+1} + e^{-x_{i+1}}), \end{cases}$$

که در آن

$$u^*_{i+1} = u_i + h(v_i - w_i + x_i), \quad v^*_{i+1} = v_i - hu_i, \quad w^*_{i+1} = w_i + h(v_i + e^{-x_i}).$$

بنابراین برای $h = 0/2$ خواهیم داشت

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + 0/1\big(v_i - w_i + x_i + v_i - 0/2u_i - (w_i + 0/2(v_i + e^{-x_i})) + x_{i+1}\big), \\ v_{i+1} = v_i + 0/1\big(-u_i - u_i - 0/2(v_i - w_i + x_i)\big), \\ w_{i+1} = w_i + 0/1\big(v_i + e^{-x_i} + v_i - 0/2u_i + e^{-x_{i+1}}\big). \end{cases}$$

پس برای دستگاه 3×3 نتایج زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} u(0/2) \simeq 1 + 0/1(1 + 1 + 1 - 0/2 - (-1 + 0/4) + 0/2) = 1/36, \\ v(0/2) \simeq 1 + 0/1(-1 - 1 - 0/4) = 0/76, \\ w(0/2) \simeq -1 + 0/1(1 + 1 + 1 - 0/2 + e^{-0/2}) = -0/6381269247. \end{cases}$$

$\triangle$

۳.۴.۳ روش تیلور

در این روش باید روش تیلور را به طور همزمان برای تمامی معادلات دستگاه به کار ببریم. به عنوان مثال روش تیلور مرتبه سه برای دستگاه (۳.۳)، به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + hf_1(x_i, u_i, v_i) + \frac{h^2}{2!}f_1'(x_i, u_i, v_i) + \frac{h^3}{3!}f_1''(x_i, u_i, v_i) \\ v_{i+1} = v_i + hf_2(x_i, u_i, v_i) + \frac{h^2}{2!}f_2'(x_i, u_i, v_i) + \frac{h^3}{3!}f_2''(x_i, u_i, v_i) \end{cases}$$

که در آن $f_1'(x,u,v) = f_{1x} + f_1 f_{1u} + f_2 f_{1v}$، $f_2'(x,u,v) = f_{2x} + f_1 f_{2u} + f_2 f_{2v}$ و $f_1''(x,u,v)$ و $f_2''(x,u,v)$ به طور مشابه به دست می‌آیند.

تمرین ۱.۳ *روش تیلور مرتبه چهار را برای دستگاه (۴.۳) بنویسید.*

تمرین ۲.۳ *مثال قبل را به روش تیلور مرتبه دو و چهار حل کنید.*

۴.۴.۳ روش رانگ_کوتای چهار مرحله‌ای

در این روش برای حل دستگاه (۳.۳) داریم

$$\begin{aligned} k_1 &= hf_1(x_i, u_i, v_i), & l_1 &= hf_2(x_i, u_i, v_i), \\ k_2 &= hf_1(x_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{k_1}{2}, v_i + \tfrac{l_1}{2}), & l_2 &= hf_2(x_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{k_1}{2}, v_i + \tfrac{l_1}{2}), \\ k_3 &= hf_1(x_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{k_2}{2}, v_i + \tfrac{l_2}{2}), & l_3 &= hf_2(x_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{k_2}{2}, v_i + \tfrac{l_2}{2}), \\ k_4 &= hf_1(x_i + h, u_i + k_3, v_i + l_3), & l_4 &= hf_2(x_i + h, u_i + k_3, v_i + l_3), \\ u_{i+1} &= u_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), & v_{i+1} &= v_i + \tfrac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4). \end{aligned}$$

مثال ۱۰.۳ *در دستگاه زیر مقادیر $u(0/1)$ و $v(0/1)$ را به روش رانگ_کوتای چهار مرحله‌ای به دست آورید.*

$$\begin{cases} u'(x) = v(x), & u(0) = 0, \\ v'(x) = -u(x), & v(0) = 1. \end{cases}$$

بنابر روش رانگ_کوتای چهار مرحله‌ای به ازای $h = 0/1$، $i = 0$، $u_0 = 0$، $v_0 = 1$، $f_1(x_i, u_i, v_i) = v_i$ و

$f_۲(x_i,u_i,v_i) = -u_i$ داریم

$$
\begin{aligned}
&k_۱ = ۰/۱ v_i = ۰/۱, && l_۱ = -۰/۱ u_i = ۰,\\
&k_۲ = ۰/۱(v_i + \tfrac{l_۱}{۲}) = ۰/۱, && l_۲ = -۰/۱(u_i + \tfrac{k_۱}{۲}) = -۰/۰۰۵,\\
&k_۳ = ۰/۱(v_i + \tfrac{l_۲}{۲}) = ۰/۰۹۹۷, && l_۳ = -۰/۱(u_i + \tfrac{k_۲}{۲}) = -۰/۰۰۵,\\
&k_۴ = ۰/۱(v_i + l_۳) = ۰/۰۹۹۵۰, && l_۴ = -۰/۱(u_i + k_۳) = -۰/۰۰۹۹۷۵.
\end{aligned}
$$

$$u(۰/۱) \simeq u_۰ + \tfrac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۰ + \tfrac{۱}{۶}(۰/۱ + ۰/۲ + ۰/۱۹۹۵۰ + ۰/۰۹۹۷۵) = ۰/۰۹۹۸۷۵,$$

$$v(۰/۱) \simeq v_۰ + \tfrac{۱}{۶}(l_۱ + ۲l_۲ + ۲l_۳ + l_۴) = ۱ + \tfrac{۱}{۶}(۰ - ۰/۰۱ - ۰/۰۱ - ۰/۰۰۹۹۷۵) = ۰/۹۹۵۰۰۴۲.$$

△

مثال ۱۱.۳ *دستگاه زیر را در بازه $[۰, ۰/۲]$ با $h = ۰/۱$ به کمک روش رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای حل کنید.*

$$
\begin{cases}
u'(x) = -۴u(x) - ۲v(x) + \cos(x) + ۴\sin(x), & u(۰) = ۰,\\
v'(x) = ۳u(x) + v(x) - ۳\sin(x), & v(۰) = -۱.
\end{cases}
$$

به ازای $f_۱(x_i,u_i,v_i) = -۴u_i - ۲v_i + \cos(x_i) + ۴\sin(x_i)$، $f_۲(x_i,u_i,v_i) = ۳u_i + v_i - ۳\sin(x_i)$ و $h = ۰/۱$ در روش رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای داریم

$$
\begin{aligned}
&k_۱ = ۰/۱(-۴u_i - ۲v_i + \cos(x_i) + ۴\sin(x_i)),\\
&l_۱ = ۰/۱(۳u_i + v_i - ۳\sin(x_i)),\\
&k_۲ = ۰/۱(-۴(u_i + \tfrac{k_۱}{۲}) - ۲(v_i + \tfrac{l_۱}{۲}) + \cos(x_i + ۰/۰۵) + ۴\sin(x_i + ۰/۰۵)),\\
&l_۲ = ۰/۱(۳(u_i + \tfrac{k_۱}{۲}) + (v_i + \tfrac{l_۱}{۲}) - ۳\sin(x_i + ۰/۰۵)),\\
&k_۳ = ۰/۱(-۴(u_i + \tfrac{k_۲}{۲}) - ۲(v_i + \tfrac{l_۲}{۲}) + \cos(x_i + ۰/۰۵) + ۴\sin(x_i + ۰/۰۵)),\\
&l_۳ = ۰/۱(۳(u_i + \tfrac{k_۲}{۲}) + (v_i + \tfrac{l_۲}{۲}) - ۳\sin(x_i + ۰/۰۵)),\\
&k_۴ = ۰/۱(-۴(u_i + k_۳) - ۲(v_i + l_۳) + \cos(x_i + ۰/۱) + ۴\sin(x_i + ۰/۱)),\\
&l_۴ = ۰/۱(۳(u_i + k_۳) + (v_i + l_۳) - ۳\sin(x_i + ۰/۱)),\\
&u_{i+۱} = u_i + \tfrac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴), \qquad v_{i+۱} = v_i + \tfrac{۱}{۶}(l_۱ + ۲l_۲ + ۲l_۳ + l_۴).
\end{aligned}
$$

با $u_۰ = ۰$ و $v_۰ = -۱$ نتایج جدول ۴.۳ به دست می‌آیند. △

تمرین ۳.۳ *روش رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای را برای دستگاه (۴.۳) بنویسید.*

i	۰	۱
k_1	۰/۳	۰/۲۴۶۰۲۶۳۳۲۲
k_2	۰/۲۶۹۸۶۶۶۹۳۷	۰/۲۲۱۶۴۳۸۵۹۶
k_3	۰/۲۷۳۳۹۲۷۳۰۰	۰/۲۲۴۵۹۸۳۱۱۵
k_4	۰/۲۴۵۷۲۹۳۷۸۰	۰/۲۰۲۱۳۱۲۳۱۵
l_1	−۰/۱	−۰/۰۵۶۰۴۲۱۶۲۴۳
l_2	−۰/۰۷۴۹۹۳۷۵۰۷۸	−۰/۰۳۶۸۲۱۷۳۵۴۵
l_3	−۰/۰۷۸۲۶۳۴۳۴۲۴	−۰/۰۳۹۵۱۸۰۸۵۰۵
l_4	−۰/۰۵۵۷۵۸۵۴۹۴۰	−۰/۰۲۲۲۶۵۲۵۱۷۴
u_{i+1}	۰/۲۷۲۰۴۱۳۷۰۹	۰/۴۹۵۴۸۱۶۸۸۵
v_{i+1}	−۱/۰۷۷۰۴۵۴۸۷	−۱/۱۱۵۵۴۳۳۲۹

جدول ۴.۳: نتایج روش رانگ_کوتای چهار مرحله‌ای برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل

۵.۳ معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا

بسیاری از معادلات دیفرانسیل عادی مرتبه k به صورت $v^{(k)}(x) = f(x, v(x), v'(x), \ldots, v^{(k-1)}(x))$ همراه با مقادیر آغازی $v(x_0) = v_{01}, v'(x_0) = v_{02}, \ldots, v^{(k-1)}(x_0) = v_{0k}$ بیان می‌شوند. این گونه معادلات را می‌توان با تغییر متغیر $u_1(x) = v(x), u_2(x) = v'(x), \ldots, u_k(x) = v^{(k-1)}(x)$ به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر تبدیل کرده و به کمک یکی از روش‌های بیان‌شده در بخش‌های قبل حل کرد

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x), & u_1(x_0) = v_{01}, \\ u_2'(x) = u_3(x), & u_2(x_0) = v_{02}, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ u_{k-1}'(x) = u_k(x), & u_{k-1}(x_0) = v_{0,k-1}, \\ u_k'(x) = f(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)), & u_k(x_0) = v_{0k}. \end{cases}$$

مثال ۱۲.۳ *معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $v''(x) = x + \cos(x) - v^2(x) + v'(x)$ با شرایط اولیه $v(0) = 0$ و $v'(0) = 1$ با تغییر متغیر $u_1(x) = v(x),\ u_2(x) = v'(x)$ به دستگاه زیر تبدیل می‌شود.*

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x), & u_1(0) = 0, \\ u_2'(x) = x + \cos(x) - u_1^2(x) + u_2(x), & u_2(0) = 1. \end{cases}$$

$\triangle$

تمرین ۴.۳ *برای مثال قبل، دو تکرار از روش رانگ_کوتای چهار مرحله‌ای را با $h = 0/01$ دنبال کنید.*

تمرین

---

۱. روش تیلور مرتبه چهار را برای مسئله زیر بنویسید.

$$y' = \sin(xy), \qquad y(\pi/۲) = ۱.$$

۲. روش تیلور مرتبه چهار را برای دستگاه (۴.۳) بنویسید.

۳. x و y توابعی از t و جواب‌های دستگاه زیر هستند. مطلوب است محاسبه $x(۱/۱)$ و $y(۱/۱)$ به کمک روش رانگ-کوتای دو مرحله‌ای. (e عدد نپر پایه لگاریتم طبیعی است. به عبارت دیگر $\ln e = ۱$.)

$$\begin{cases} x' = \ln y + t & x(1) = 1 \\ y' = tx + y & y(1) = e \end{cases}$$

۴. الف) اگر $y = f(x)$ جواب معادله $y' = e^{x+y}$ با شرط اولیه $y(۰) = ۰$ باشد؛ مطلوب است محاسبه مقدار تقریبی $f(۰/۶)$ به کمک روش اویلر اصلاح‌شده و به ازای $h = ۰/۲$. جواب واقعی معادله را به دست آورده و با جواب‌های تقریبی مقایسه کنید.

ب) x و y توابعی از t و جواب‌های دستگاه زیر هستند. مطلوب است $x(۰/۲)$ و $y(۰/۲)$ به کمک روش رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای.

$$\begin{cases} x' = y^2 + t, & x(0) = 0, \\ y' = \cos(x), & y(0) = 1. \end{cases}$$

۵. فرض کنید y تابعی از متغیر x باشد. مطلوب است حل مسئله $y' = ۱ + (x-y)^۲, y(۲) = ۱$ به کمک روش‌های رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای و تیلور مرتبه سه در بازه $[۲, ۳]$ و به ازای $h = ۰/۵$.

۶. فرض کنید λ یک عدد حقیقی باشد و معادله دیفرانسیل $y' = \lambda y$ با شرط اولیه $y(t_۰) = y_۰$ را روی بازه $[t_۰, t_N]$ در نظر بگیرید. نشان دهید روش‌های تیلور مرتبه ۴ و رانگ-کوتای ۴ مرحله‌ای در حل این مسئله به رابطه بازگشتی یکسانی برای $y_{n+۱}$ خواهند رسید (طول گام را h در نظر بگیرید).

۷. مسئله $\begin{cases} y' = ۲t(۱+y), & t \in [۰, ۱], \\ y(۰) = ۰. \end{cases}$ را در نظر بگیرید. جدول زیر را با استفاده از روش رانگ-کوتای

دومرحله‌ای کامل کنید. (محاسبات با دقت $5D$)

n	t_n	k_1	k_2	w_n
۰	…	…	…	…
۱	…	…	…	…
۲	…	…	…	…
۳	…	…	…	…
۴	…	…	…	…

۸. برای مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} y' = e^x + y, & x \in [0, 0/2], \\ y(0) = 1 \end{cases}$ مقدار تقریبی $y(0/2)$ را با انتخاب $h = 0/1$ و به کمک روش رانگ-کوتای دو مرحله‌ای بیابید (محاسبات با چهار رقم بامعنا).

۹. معادله دیفرانسیل $y' = xy$ را با مقدار اولیه $y(1) = 1$ در نظر بگیرید. در یک گام مقدار $y(1/1)$ را به روش‌های تیلور مرتبه ۴ و رانگ - کوتای چهار مرحله‌ای تقریب بزنید. (محاسبات با چهار رقم بامعنا).