و این دلالت بر آن دارد که $\frac{\partial J(\boldsymbol{x})^{-1}}{\partial x_j}$ قابل تعریف است به شرط آن که مشتقات جزئی مرتبه دوم f_i ها موجود باشند. چون $F(\boldsymbol{\alpha}) = 0$، از (۲.۳) خواهیم داشت $J(\boldsymbol{\alpha})\frac{\partial g(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_j} = 0$ که اگر $J(\boldsymbol{\alpha})$ وارون‌پذیر باشد آن‌گاه $\frac{\partial g(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n$ و با توجه به $g(\boldsymbol{x}) = [g_1(\boldsymbol{x}) \ \cdots \ g_n(\boldsymbol{x})]^T$ داریم

$$\frac{\partial g_l(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_j} = 0, \qquad j, l = 1, \dots, n. \tag{۳.۳}$$

حال اگر R ناحیه‌ای بسته، محدب و شامل $\boldsymbol{\alpha}$ باشد، به کمک قضیه تیلور برای توابع چندمتغیره، برای نقطه دلخواه $\boldsymbol{\beta}$ در R و به ازای $l = 1, \dots, n$ داریم

$$g_l(\boldsymbol{\beta}) = g_l(\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha})) = g_l(\boldsymbol{\alpha}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_l(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_j}(\beta_j - \alpha_j) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g_l(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}(\beta_i - \alpha_i)(\beta_j - \alpha_j),$$

که در آن ξ روی خط واصل $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ قرار دارد (چون R محدب فرض شده است $\xi \in R$). بنابر (۳.۳) می‌توان نوشت

$$|g_l(\boldsymbol{\beta}) - g_l(\boldsymbol{\alpha})| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g_l(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}(\beta_i - \alpha_i)(\beta_j - \alpha_j)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 g_l(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right)\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}\|_\infty^2,$$

و اگر داشته باشیم $\max_{\boldsymbol{x}\in R}\left|\frac{\partial^2 g_l(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leq M, \quad 1 \leq i, j, l \leq n$ آن‌گاه $|g_l(\boldsymbol{\beta}) - g_l(\boldsymbol{\alpha})| \leq \frac{Mn^2}{2}\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}\|_\infty^2$ و از آنجا $\|g(\boldsymbol{\beta}) - g(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty \leq \frac{Mn^2}{2}\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}\|_\infty^2$ و با انتخاب $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{x}^{(k-1)}$ و با توجه به روابط $\boldsymbol{\alpha} = g(\boldsymbol{\alpha})$ و $\boldsymbol{x}^{(k)} = g(\boldsymbol{x}^{(k-1)})$ می‌توان نوشت

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{\alpha}\right\|_\infty \leq \frac{Mn^2}{2}\left\|\boldsymbol{x}^{(k-1)} - \boldsymbol{\alpha}\right\|_\infty^2,$$

و این دلالت بر آن دارد که همگرایی روش نیوتن از مرتبه دو است (البته با توجه به همه مفروضات).

تمرین ۷.۳ *برای حل دستگاه معادلات غیرخطی $F(\boldsymbol{x}) = 0$، طرح تکراری زیر را به کار می‌بریم*

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k-1)} + A(\boldsymbol{x}^{(k-1)})F(\boldsymbol{x}^{(k-1)}), \qquad k = 1, 2, \dots.$$

ماتریس A را به گونه‌ای به دست آورید که همگرایی روش از مرتبه دو باشد.

۴.۳ تمرین‌ها

۱. الف) با روش تکرار نقطه ثابت نشان دهید مقدار $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$ برابر ۲ است.
ب) تقریبی برای A با دقت ۰٫۰۰۱ به دست آورید.

۲. معادله $5x - 4\cos(x) = 0$ مفروض است.
الف) نشان دهید این معادله دارای تنها یک ریشه است و ریشه را با روش تکرار نقطه ثابت و دقت $\epsilon = 0/0001$ به دست آورید.

ب) جواب معادله را با روش Δ^2 ایتکن با همان دقت به دست آورید.

۳. معادله $e^x\sin(x)+25x+1=0$ مفروض است. نشان دهید این معادله دارای یک ریشه منفی است. همچنین نشان دهید برای اینکه خطا کمتر از $0/001$ باشد چند تکرار از روش دوبخشی نیاز است؟ ریشه را به کمک روش دوبخشی با ۵ تکرار تقریب بزنید.

۴. اگر f یک تابع پیوسته باشد و نقطه ثابت نداشته باشد، ثابت کنید fof نیز نقطه ثابت ندارد.

۵. معادله $ax^3+bx^2+x-2=0$ مفروض است.

الف) a و b را طوری اختیار کنید که $x=1$ ریشه مضاعف معادله فوق باشد.

ب) این ریشه را با استفاده از روش نیوتن تعمیم‌یافته و با دقت $\epsilon=\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ به دست آورید.

پ) مرتبه همگرایی روش را به دست آورید.

۶. $\sqrt[4]{13}$ را با ۶ رقم اعشار به دست آورید.

۷. فرض کنید تابع f بر بازه $(0,1)$ مشتق‌پذیر باشد و $f(0)<0<f(1)$ و اعداد حقیقی a و b موجود باشند به‌طوری‌که $0<a\le f'(x)\le b \quad \forall x\in[0,1]$. عدد ثابت m را طوری تعیین کنید که دنباله x_n تولیدشده توسط رابطه $x_{n+1}=x_n+m(f(x_n)) \quad n=0,1,\cdots$ به ازای هر x_0 در $[0,1]$ به تنها ریشه معادله $f(x)=0$ در بازه $[0,1]$ همگرا باشد.

۸. برای حل معادله $x^2-2=0$ از توابع تکرار $g_1(x)=\frac{x+2}{x+1}$ و $g_2(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$ استفاده می‌کنیم. نشان دهید روش نقطه ثابت، با انتخاب نقطه اولیه مناسب x_0 با استفاده از هر یک از توابع تکرار g_1 و g_2 به $\sqrt{2}$ همگرا می‌شود. کدام یک از این دو تابع تکرار برای تقریب $\sqrt{2}$ مناسب تر است؟ چرا؟

۹. برای به دست آوردن ریشه α معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ که در آن $a\alpha^2\neq c\neq 0$ از رابطه تکراری $x_{n+1}=\frac{bx_n^2+2cx_n}{c-ax_n^2}$ و x_0 مناسب استفاده می‌کنیم. مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ را به دست آورید.

۱۰. فرض کنید $\beta>4(\frac{3}{4e})^{\frac{3}{4}}$. نشان دهید به ازای هر x_0 مثبت، دنباله $\{x_n\}$ که از رابطه تکراری $x_{n+1}=\frac{1}{\beta}e^{-x_n^4}$ به دست می‌آید، همگرا است.

۱۱. فرض کنید تابع f دارای مشتق مرتبه اول پیوسته است و به ازای هر عدد حقیقی x داریم $f'(x)\ge M\ge 0$. نشان دهید معادله $f(x)=0$ دارای یک ریشه منحصر به فرد است و اولین ریشه بین $x=0$ و $x=\frac{-f(0)}{M}$ قرار دارد.

۱۲. با استفاده از فرمول تکرار روش نیوتن، یک رابطه تکراری برای محاسبه معکوس عدد غیر صفر a به دست آورید.

۱۳. به طور مستقیم، نشان دهید که اگر α ریشه ساده معادله $f(x)=0$ باشد و دنباله $\{x_n\}$ که از روش نیوتن به دست می‌آید به α همگرا باشد، آن‌گاه مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ حداقل دو است.

۱۴. فرض کنید $f\in C^1[a,b]$ و α ریشه تکراری مرتبه m معادله $f(x)=0$ است و

$$h(x)=f(x+f(x))-f(x).$$

الف) ثابت کنید α ریشه مرتبه $2m-1$ معادله $h(x)=0$ است.

ب) با استفاده از قسمت الف نشان دهید α ریشه ساده معادله $r(x)=0$ است که در آن، $r(x)=\frac{f^2(x)}{h(x)}$.

۱۵. فرض کنید r ریشه معادله $f(x) = ۰$ و x_n و $x_{n+۱}$ دو تقریب متوالی برای r در روش تکراری نیوتن باشد. فرض کنید f، f' و f'' بر بازه‌ای مانند I شامل x_n و $x_{n+۱}$ پیوسته باشد و ثابت‌های $K > ۰$ و $L > ۰$ وجود داشته باشند به طوری که $\forall x \in I$

$$| f'(x) | \geq L, \qquad | f''(x) | \leq K.$$

رابطه زیر را ثابت کنید

$$| x_{n+۱} - r | \leq \frac{K}{۲L} | x_{n+۱} - x_n |^۲ .$$

۱۶. ابتدا نشان دهید معادله $x^۲ - ۴ \sin x = ۰$ فقط یک ریشه در بازه $[۱,۲]$ دارد. سپس برای آن که تقریبی از این ریشه با دقت $۳D$ به دست آید به چند بار نصف کردن نیاز است؟ در پایان ریشه را با این دقت تعیین کنید.

۱۷. با شروع از بازه $[۰,۵]$، روش دوبخشی به کدام صفر تابع $f(x) = (x-۱)(x-۲)(x-۳)^۲(x-۴)$ همگرا می‌شود؟

۱۸. برای محاسبه ریشه مثبت معادله $x^۲ + x - ۱ = ۰$، می‌توان توابع زیر را در نظر گرفت

$$x = g_۱(x) := ۱ - x^۲, \quad x = g_۲(x) := \sqrt{۱-x}, \quad x = g_۳(x) := \frac{۱}{۱+x}, \quad x = g_۴(x) := \frac{x^۲+۱}{۲x+۱}.$$

به کمک قضیه نقطه ثابت نشان دهید $g_۱$ مناسب نیست و به ترتیب $g_۴$، $g_۳$ و $g_۲$ مناسب‌تر هستند.

۱۹. برای مثال ۹.۳، آیا تابع $g(x) = e^{۲x-۴}$ در شرایط قضیه نقطه ثابت صدق می‌کند؟

۲۰. یک طرح تکراری برای یافتن صفر مرتبه دو تابع $f(x) = ۱ - e^{x^۲}$ با مرتبه همگرایی دو به دست آورید.

۲۱. برای یافتن ریشه $x = ۰$ معادله $x + x^۳ - \sin(x) = ۰$ کدام دنباله مرتبه همگرایی بزرگتری دارد؟

الف) $x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ب) $x_{n+۱} = x_n - ۲\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ج) $x_{n+۱} = x_n - ۳\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ د) $x_{n+۱} = \sin(x_n) - x_n^۳$

۲۲. یک طرح تکراری برای تعیین $\sqrt[۳]{۲}$ به کمک روش نیوتن بسازید.

۲۳. کدام گزینه نادرست است؟

الف) روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است که همگرایی تضمین شده‌ای دارد.

ب) در یافتن ریشه‌های مضاعف یک تابع مرتبه همگرایی روش نیوتن دو نیست.

ج) اگر $g'(\alpha) = ۰$ آنگاه مرتبه همگرایی روش تکرار ساده حداقل دو است.

د) روش وتری لزوما همگرا نیست.

۲۴. کدام بازه $[a,b]$ این خاصیت را دارد که "دنباله حاصل از روش تکرار ساده $x_{n+۱} = ۰/۳(x_n - ۰/۱)^۳ - ۰/۲$ برای هر $x_۰ \in [a,b]$ به $\alpha \in [a,b]$ همگرا است"؟

الف) $[۱,۱/۵]$ ب) $[-۲,-۱]$ ج) $[-۰/۵,۰]$ د) $[۲,۲/۵]$

۲۵. اگر $x_{n+۱} = \frac{۴}{۵}\cos(x_n)$ با $x_۰ = ۱$ به $\alpha \in [۰,\frac{\pi}{۲}]$ همگرا باشد، حداکثر مقدار $|x_{۱۰} - \alpha|$ کدام است؟

الف) ۰/۱۹۷۴ ب) ۰/۱۰۷۴ ج) ۰/۲۱۴۸ د) ۰/۳۰۴۸

۲۶. اگر بخواهیم جواب معادله $\sin(x) - \cos(x) = 0{,}1$ را با $x_0 = 0{,}8$ و $x_1 = 1$، به روش وتری حل کنیم x_3 کدام گزینه است؟ الف) ۰٫۸۵۶۱۶۶۱۱۲ ب) ۰٫۸۵۶۱۴۳۹۹۹ ج) ۰٫۸۵۶۶۲۹۴۵۶ د) ۰٫۸۵۶۲۳۶۹۹۰

۲۷. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

الف) روش نیوتن برای حل معادلات غیرخطی همیشه همگرا است.

ب) روش دوبخشی برای یافتن تمام ریشه‌ها همگرا است.

ج) مرتبه همگرایی روش نیوتن به مرتبه ریشه بستگی دارد.

د) مرتبه همگرایی روش وتری بیشتر از مرتبه همگرایی روش نیوتن است.

۲۸. اگر از روش دوبخشی برای محاسبه ریشه مثبت معادله $3xe^x = 1$ در بازه $[0, 1]$ با دقت $0{,}5 \times 10^{-4}$ استفاده شود، حداقل چند تکرار از روش دوبخشی لازم است؟

الف) ۱۴ ب) ۱۵ ج) ۱۹ د) ۱۷

۲۹. مرتبه همگرایی روش نیوتن برای پیدا کردن ریشه‌های $f(x) = x^4 - 2x^2 = 0$ در صورتی که به ریشه همگرا شود، چند است؟

الف) برای همه ریشه‌ها خطی است.

ب) برای همه ریشه‌ها از مرتبه دو است.

ج) برای ریشه‌ی صفر از مرتبه دو و برای ریشه‌های ناصفر خطی است.

د) برای ریشه‌ی صفر خطی است و برای ریشه‌های ناصفر از مرتبه دو است.

۳۰. طرح تکراری $x_{n+1} = \frac{2}{3}\left(x_n + \frac{1}{x_n^2}\right)$ با

الف) مرتبه همگرایی دو به $\sqrt[3]{2}$ همگرا است.

ب) مرتبه همگرایی حداقل دو به $\sqrt[3]{2}$ همگرا است.

ج) مرتبه همگرایی دو به $\sqrt{2}$ همگرا است.

د) مرتبه همگرایی حداقل دو به $\sqrt{2}$ همگرا است.

۳۱. فرض کنید $f(x) = x + \cos x$ و $x_0 = 0$ و $x_1 = 0{,}5$ باشد. مقدار x_2 در روش وتری کدام است؟

الف) ۱٫۴۲۳۲− ب) ۱٫۳۲۴۲ ج) ۱٫۴۲۳۲ د) ۱٫۳۲۴۲−

۳۲. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد ریشه $\alpha = 0$ برای $f(x) = \sin x - \sinh x$ صحیح است؟

الف) روش نیوتن همگرای مرتبه دو است.

ب) روش دوبخشی همگرا نیست.

ج) روش نیوتن همگرای مرتبه یک است.

د) روش نیوتن همگرای حداقل مرتبه دو است.

۳۳. کدام گزینه درست است؟

الف) معادله $x = 1 + \tan^{-1} x$ نقطه ثابت یکتا در بازه $[2, 3]$ دارد.

ب) تابع $g(x) = 1 + \tan^{-1} x$ ریشه یکتا در بازه $[2, 3]$ دارد.

ج) تابع $g(x) = 1 + \tan^{-1} x$ نقطه ثابت یکتا در بازه $[2, 3]$ دارد.

د) معادله $x = 1 + \tan x$ ریشه یکتا در بازه $[2, 3]$ دارد.

۳۴. با این فرض که $f(x) = \cos(e^x)$، $x_0 = 0$، x_1 با روش نیوتن و x_2 با روش وتری به دست آید، x_1 و x_2 به ترتیب کدامند؟

الف) ۰٫۶۴۲۰ و ۰٫۴۰۱۵ ب) ۰٫۶۴۲۱ و ۰٫۴۰۱۵ ج) ۰٫۶۴۲۰ و ۰٫۴۰۱۶ د) ۰٫۶۴۲۱ و ۰٫۴۰۱۶

۳۵. چند تکرار روش دوبخشی در بازه $[-0/5, 1/5]$ لازم است تا ریشه $f(x) = 1 - e^x$ با حداکثر خطای 10^{-3} محاسبه شود؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۸

۳۶. کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟

الف) روش دوبخشی برای یافتن تمامی ریشه‌ها همگرا است.

ب) مرتبه همگرایی روش نیوتن به مرتبه ریشه بستگی دارد.

ج) مرتبه همگرایی روش وتری بیشتر از مرتبه همگرایی روش نیوتن است.

د) روش نیوتن برای حل معادلات غیرخطی همیشه همگرا است.