فصل ۴

درون‌یابی و تقریب

مقدمه

در جمهوری اسلامی ایران هر ده سال یک بار سرشماری جمعیت انجام می‌شد و قرار شده است از این به بعد هر پنج سال یک بار انجام پذیرد. جدول ۱.۴ جمعیت کشور را در سال‌های ۱۳۳۵ تا ۱۳۹۵ نشان می‌دهد. در ارتباط با این جدول سوال‌های زیر مطرح می‌شوند

- در سال ۱۳۵۹ (آغاز جنگ تحمیلی ایران با عراق) جمعیت ایران چقدر بوده است؟
- در سال ۱۴۰۰ جمعیت ایران چقدر خواهد بود؟
- در سال ۱۳۳۰ جمعیت ایران چقدر بوده است؟
- در چه سالی جمعیت ایران حدود ۴۰ میلیون نفر بوده است؟

سال	۱۳۳۵	۱۳۴۵	۱۳۵۵	۱۳۶۵	۱۳۷۵	۱۳۸۵	۱۳۹۰	۱۳۹۵
میلیون نفر	۱۸٫۹۵	۲۵٫۷۹	۳۳٫۷۱	۴۹٫۴۵	۶۰٫۰۶	۷۰٫۴۷	۷۵٫۱۵	۷۹٫۹۳

جدول ۱.۴: جمعیت ایران در سال‌های ۱۳۳۵ تا ۱۳۹۵

تعریف ۱.۴ *فرض کنید تابع $y = f(x)$ در دسترس نباشد (یا ضابطه‌ای پیچیده داشته باشد) ولی مقدار آن در $n + 1$ نقطه $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ معلوم باشد. مسئله یافتن مقدار تابع f در نقطه x متعلق به بازه $[x_0, x_n]$ به مسئله درون‌یابی (سوال اول)، مسئله یافتن مقدار تابع f در نقطه x که به بازه $[x_0, x_n]$ تعلق ندارد به مسئله برون‌یابی (سوال دوم و سوم) و مسئله تعیین x زمانی که $f(x)$ معلوم باشد به مسئله درون‌یابی وارون (سوال چهارم) معروف است.*

۱.۴ درون‌یابی

قضیه ۱.۴ **(تقریب وایرشتراس)** *فرض کنید $f \in C[a,b]$. به ازای هر $\epsilon > 0$ چندجمله‌ای p چنان وجود دارد که*

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

با توجه به این قضیه و با توجه به همواری چندجمله‌ای‌ها (مشتق و انتگرال یک چندجمله‌ای، چندجمله‌ای است)، چنین به نظر می‌رسد که ساده‌ترین روش برای حل مسئله درون‌یابی، ساختن چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f است.

تعریف ۲.۴ *فرض کنید مقدار تابع f در $n+1$ نقطه $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ معلوم باشد. چندجمله‌ای p را چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f نامند اگر*

$$i = 0, 1, \ldots, n \quad : \quad p(x_i) = f(x_i).$$

این رابطه به ویژگی چندجمله‌ای درون‌یاب معروف است.

قضیه ۲.۴ *اگر مقدار تابع f در $n+1$ نقطه متمایز $x_0, x_1, \ldots, x_n$ معلوم باشد، آن‌گاه یک و فقط یک چندجمله‌ای با حداکثر درجه n با ویژگی درون‌یابی وجود دارد.*

برهان. فرض کنید $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ چندجمله‌ای درون‌یاب (با ضرایب نامعین) تابع f در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ باشد. بنابر ویژگی درون‌یابی داریم

$$\begin{aligned}
p(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f_0, \\
p(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = f_1, \\
&\vdots \\
p(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f_n,
\end{aligned}$$

که در آن $f_i = f(x_i)$. این معادله‌ها را می‌توان به شکل فشرده $A\alpha = F$ نوشت که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

ماتریس A به ماتریس واندرموند معروف است و ثابت می‌شود $\det(A) = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$. چون نقاط x_i و x_j متمایز هستند واضح است که $\det(A) \neq 0$ و بنابراین دستگاه $A\alpha = F$ جواب یکتا دارد. □

تذکر ۱.۴ *اثبات این قضیه دلالت دارد بر روش ضرایب نامعین برای تعیین چندجمله‌ای درون‌یاب که به تولید یک دستگاه پُر و بدحالت منجر می‌شود (در عمل جواب‌های عددی رضایت‌بخشی به دست نمی‌آید) و برای nهای بزرگ کارایی ندارد. در ادامه روش‌های کاراتر بررسی می‌شوند.*

۱.۱.۴ روش لاگرانژ

فرض کنید L_j به ازای $j = 0, 1, \ldots, n$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد و قرار دهید

$$p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \cdots + f_n L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x).$$

برای آن که p در ویژگی درون‌یابی صدق کند باید داشته باشیم

$$L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

یعنی L_j باید در n نقطه $x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ صفر شود. بنابراین

$$L_j(x) = c(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n),$$

و چون $L_j(x_j) = 1$ پس

$$c = \frac{1}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)},$$

و در نتیجه

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} = \prod_{j \neq k = 0}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

تذکر ۲.۴ *چندجمله‌ای‌های L_j از درجه n هستند و به چندجمله‌ای‌های لاگرانژ معروف هستند و به کمک چندجمله‌ای*

$$\psi_n(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i),$$

می‌توان نوشت

$$p(x) = \psi_n(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{f_j}{(x - x_j)\psi_n'(x_j)}.$$

تمرین ۱.۴ *نشان دهید چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مستقل خطی بوده و $\sum_{j=0}^{n} L_j(x) = 1$.*

الگوریتم روش لاگرانژ

- **ورودی.** نقاط $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$
- **خروجی.** چندجمله‌ای درون‌یاب f

۱) برای $j = 0, 1, \ldots, n$ قرار دهید $L_j(x) = \prod_{j \neq k = 0}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$

۲) قرار دهید $p(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x)$

مثال ۱.۴ *چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به داده‌های جدول زیر را با روش لاگرانژ تعیین کنید.*

x_i	-1	0	2
f_i	1	1	7

به وضوح $n=2$ و داریم

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)}=\frac{x^2-2x}{3},$$
$$L_1(x)=\frac{(x-(-1))(x-2)}{(0-(-1))(0-2)}=\frac{-x^2+x+2}{2},\qquad L_2(x)=\frac{(x-(-1))(x-0)}{(2-(-1))(2-0)}=\frac{x^2+x}{6}$$

و بنابراین

$$p(x)=f_0L_0(x)+f_1L_1(x)+f_2L_2(x)=1\times(\frac{x^2-x}{2})+1\times\frac{-x^2+x+2}{2}+7\times(\frac{x^2+x}{6})=x^2+x+1$$

پس می‌توان به عنوان مثال $p(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+1=\frac{7}{4}$ را به عنوان تقریبی از $f(\frac{1}{2})$ پذیرفت. $\triangle$

مثال ۲.۴ *چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به داده‌های جدول زیر را با روش لاگرانژ تعیین کنید.*

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	3	7

به وضوح $n=3$ و داریم

$$L_0(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6},$$
$$L_1(x)=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2},\quad L_2(x)=\frac{x^3-x^2-2x}{-2},\qquad L_3(x)=\frac{x^3-x}{6}$$

و بنابراین

$$p(x)=1\times L_0(x)+1\times L_1(x)+3\times L_2(x)+7\times L_3(x)=x^2+x+1$$

با آن که L_jها درجه ۳ هستند ولی p درجه ۲ است. $\triangle$

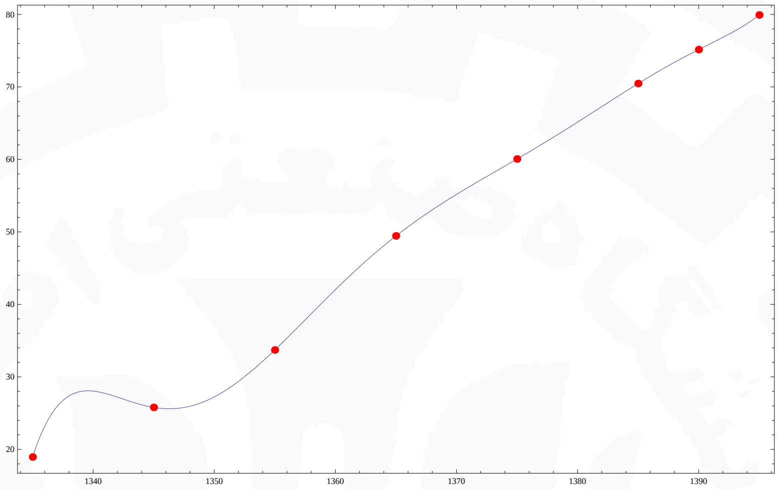
اشکالات روش لاگرانژ

- محاسبات حتی زمانی که n کوچک باشد زیاد است و برای nهای بزرگ روش کارایی چندانی ندارد؛
- با اضافه شدن یک نقطه به داده‌های قبلی، باید تمام عملیات را از سر گرفت (از محاسبات قبلی استفاده نمی‌شود)؛
- قبل از اتمام عملیات، درجه چندجمله‌ای درون‌یاب معلوم نیست.

مثال ۳.۴ *چندجمله‌ای درون‌یاب داده‌های جمعیت ایران را ساخته و نمودار آن را در شکل ۱.۴ رسم کرده‌ایم. نتایج*

$$p(۱۳۳۰)=-۴۴/۹۵,\ p(۱۳۴۰)=۲۸/۰۴,\ p(۱۳۵۹)=۴۰/۳۹,\ p(۱۳۶۸)=۵۱/۹۲,\ p(۱۴۰۰)=۹۳/۲۹$$

به دست می‌آیند که باید به دقت تفسیر شوند. △



شکل ۱.۴: نمودار جمعیت ایران در سال‌های ۱۳۹۵–۱۳۳۵

۲.۱.۴ روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

در این بخش روشی ساخته می‌شود که اشکالات روش لاگرانژ را برطرف کند. به همین منظور، فرض کنید فضای تمام چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر n را با π_n نمایش دهیم.

تمرین ۲.۴ *نشان دهید*

$$\pi_n = \mathsf{span}\{1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}.$$

یعنی نشان دهید چندجمله‌ای‌های

$$1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

مستقل خطی هستند.

بنابراین، می‌توان هر چندجمله‌ای از درجه حداکثر n را به صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های اخیر نوشت. به ویژه برای چندجمله‌ای درون‌یاب p خواهیم داشت

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}).$$

ضرایب $a_0, a_1, \ldots, a_n$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که p در ویژگی درون‌یابی صدق کند. پس باید داشته باشیم

$$p(x_0) = a_0 = f_0 \longrightarrow a_0 = f_0,$$
$$p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1 \longrightarrow a_1 = \tfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

پیش از آن که سایر ضرایب را به همین صورت به دست آوریم، تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۴ *فرض کنید $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نقاطی متمایز باشند. تفاضل تقسیم‌شده مرتبه اول f در نقاط x_i و x_{i+1} که با نماد $f[x_i, x_{i+1}]$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر است*

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i},$$

و تفاضل تقسیم‌شده مرتبه j تابع f در نقاط $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}.$$

بنابراین با توجه به نماد تعریف‌شده می‌توان نوشت $a_1 = f[x_0, x_1]$ و داریم

$$p(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2,$$

و از آن‌جا خواهیم داشت

$$a_2 = \frac{f_2 - f_0 - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}}{(x_2 - x_0)} = \frac{\frac{f_2 - f_1 + f_1 - f_0}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\frac{x_2 - x_1 + x_1 - x_0}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_0},$$

و یا

$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

در نتیجه

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2].$$

با یک روند استقرایی می‌توان نشان داد

$$a_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_j], \qquad j = 1, \ldots, n,$$

و بنابراین

$$p(x) = f_0 + \sum_{j=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j](x - x_0)\cdots(x - x_{j-1}).$$

الگوریتم روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

- **ورودی.** نقاط $(x_۰, f_۰), (x_۱, f_۱), \dots, (x_n, f_n)$
- **خروجی.** اعداد $F_{۰,۰}, F_{۱,۱}, \dots, F_{n,n}$ به طوری که $p(x) = \sum_{i=۰}^{n} F_{i,i} \prod_{k=۰}^{i-۱}(x - x_k)$

۱) برای $i = ۰, ۱, \dots, n$ قرار بده $F_{i,۰} = f_i$

۲) برای $i = ۱, \dots, n$ و $j = ۱, \dots, i$ قرار بده $F_{i,j} = \frac{F_{i,j-۱} - F_{i-۱,j-۱}}{x_i - x_{i-j}}$

مثال ۴.۴ *چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به جدول زیر را با روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن تعیین کنید.*

x_i	-۱	۰	۲
f_i	۱	۱	۷

برای ساختن چندجمله‌ای درون‌یاب، جدولی معروف به جدول تفاضلات تقسیم‌شده به صورت زیر می‌سازیم

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+۱}]$	$f[x_۰, x_۱, x_۲]$
-۱	۱		
		$\frac{۱-۱}{۰-(-۱)} = ۰$	
۰	۱		$\frac{۳-۰}{۲-(-۱)} = ۱$
		$\frac{۷-۱}{۲-۰} = ۳$	
۲	۷		

و به کمک آن داریم $p(x) = ۱ + (۰)(x-(-۱)) + (۱)(x-(-۱))(x-(۰)) = x^۲ + x + ۱$. $\triangle$

مثال ۵.۴ *اگر داده* $(۱, ۳)$ *به جدول مثال قبل اضافه شود، آن را دوباره حل کنید.*
به راحتی می‌توان جدول مثال قبل را به صورت زیر اصلاح کرد.

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+۱}]$	$f[x_i, x_{i+۱}, x_{i+۲}]$	$f[x_۰, x_۱, x_۲, x_۳]$
-۱	۱			
		۰		
			۱	
۰	۱			
		۳		$\frac{۱-۱}{۱-(-۱)} = ۰$
۲	۷			
			$\frac{۴-۳}{۱-۰} = ۱$	
		$\frac{۳-۷}{۱-۲} = ۴$		
۱	۳			

و سپس $q(x) = p(x) + 0(x+1)x(x-2) = p(x) = x^2 + x + 1$. △

مزایای روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

- حجم عملیات چندان زیاد نیست؛
- با اضافه شدن یک نقطه (نقاطی) به جدول، از محاسبات قبلی استفاده می‌شود؛
- چندجمله‌ای درون‌یاب به تدریج ساخته می‌شود و درجه آن، پس از ساختن جدول مشخص می‌شود.

تذکر ۳.۴ *چندجمله‌ای درون‌یاب به ترتیب نقاط بستگی ندارد، به بیان دیگر اگر p چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در مجموعه نقاط $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ و q چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در مجموعه نقاط $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ باشد و داشته باشیم $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ آن‌گاه بنابر یکتایی چندجمله‌ای درون‌یاب داریم $p = q$. به علاوه با توجه به ضریب x^n در p و q داریم $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ یعنی تفاضل تقسیم‌شده به ترتیب نقاط بستگی ندارد.*

تذکر ۴.۴ *اگر p_n چندجمله‌ای درون‌یاب در نقاط $x_0, \ldots, x_n$ و p_{n+1} چندجمله‌ای درون‌یاب در نقاط $x_0, \ldots, x_{n+1}$ باشد، آنگاه داریم*

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, \ldots, x_{n+1}](x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

۳.۱.۴ روش‌های پیشرو/پسرو نیوتن

روش‌های لاگرانژ و تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن برای نقاط $x_0, \ldots, x_n$ چه هم‌فاصله باشند و چه نباشند به کار برده می‌شود، اما اگر نقاط هم‌فاصله باشند چندجمله‌ای درون‌یاب به شکل ساده‌تری قابل بیان است که در ادامه با نحوه نمایش آن آشنا می‌شویم. فرض کنید

$$x_{i+1} - x_i = h, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

و یا

$$x_i = x_0 + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

تعریف ۴.۴ *عملگر انتقال که با E نمایش داده می‌شود به صورت $Ef_i = f_{i+1} = f(x_{i+1})$ تعریف می‌شود و برای هر k طبیعی داریم $E^k f_i = f_{i+k}$. با این فرض که به ازای هر α حقیقی داشته باشیم $x_{i+\alpha} = x_i + \alpha h$ و $f_{i+\alpha} = f(x_{i+\alpha})$ می‌توان تعریف کرد $E^\alpha f_i = f_{i+\alpha}$، به ویژه $E^{-1} f_i = f_{i-1}$.*

تعریف ۵.۴ *عملگر تفاضل پیشرو که با Δ نمایش داده می‌شود به صورت $\Delta = E - 1$ بیان می‌شود. بنابراین $\Delta f_i = (E-1)f_i = f_{i+1} - f_i$ و برای هر k طبیعی داریم*

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta(\Delta^k f_i) = \Delta^k(\Delta f_i) = \Delta^k(f_{i+1} - f_i) = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i.$$

به عنوان مثال $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$. *به طور مشابه عملگر تفاضل پسرو که با* ∇ *نمایش داده می‌شود، به صورت* $\nabla = 1 - E^{-1}$ *بیان شده و در نتیجه* $\nabla f_i = (1 - E^{-1}) f_i = f_i - f_{i-1}$ *و برای هر* k *طبیعی داریم*

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla(\nabla^k f_i) = \nabla^k(\nabla f_i) = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}.$$

به عنوان مثال $\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$.

بررسی روابط زیر به سادگی امکان‌پذیر است.

$$1) E\Delta = \Delta E, \qquad 2) E\nabla = \nabla E, \qquad 3) \Delta\nabla = \nabla\Delta,$$

$$4) \Delta f_i = \nabla f_{i+1}, \quad 5) \nabla f_i = \Delta f_{i-1}, \quad 6) \Delta^k f_i = \nabla^k f_{i+k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

لم ۱.۴ *اگر* k *عددی طبیعی باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح نامنفی* i *داریم*

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k} = \frac{\nabla^k f_{i+k}}{k! h^k}.$$

قضیه ۳.۴ **(چندجمله‌ای درون‌یاب پیشروی نیوتن)** *چندجمله‌ای درون‌یاب* f *در نقاط هم‌فاصله* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *به صورت زیر است*

$$p(x) = f_0 + \theta\Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 = f_0 + \sum_{l=1}^{n}\binom{\theta}{l}\Delta^l f_0,$$

که در آن $\theta = \frac{x-x_0}{h}$ *و برای هر* l *در* $\mathbb{N}$ *و هر* θ *در* $\mathbb{R}$ *داریم*

$$\binom{\theta}{l} = \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-l+1)}{l!}.$$

نتیجه ۱.۳.۴ چندجمله‌ای درون‌یاب در نقاط هم‌فاصله $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$p(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-k+1)}{k!}\Delta^k f_i, \qquad \theta = \frac{x-x_i}{h}.$$

قضیه ۴.۴ **(چندجمله‌ای درون‌یاب پسرو نیوتن)** *چندجمله‌ای درون‌یاب* f *در نقاط هم‌فاصله* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *به صورت زیر است (با این فرض که* $\theta = \frac{x-x_i}{h}$*)*

$$p(x) = f_n + \theta\nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \cdots + \frac{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+n-1)}{n!}\nabla^n f_n = f_n + \sum_{l=1}^{n}\binom{\theta+l-1}{l}\nabla^l f_n.$$

نتیجه ۱.۴.۴ *چندجمله‌ای درون‌یاب در نقاط هم‌فاصله $x_{i-k}, x_{i-k+1}, \ldots, x_i$ به صورت زیر قابل بیان است*

$$p(x) = f_i + \theta \nabla f_i + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_i + \cdots + \frac{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+k-1)}{k!}\nabla^k f_i, \qquad \theta = \frac{x - x_i}{h}.$$

تذکر ۵.۴ *در عمل هنگام استفاده از نتایج ۱.۳.۴ و ۱.۴.۴، این سوال مطرح می‌شود که کدام انتخاب (پیشرو یا پسرو، انتخاب x_i و درجه چندجمله‌ای (k)) مناسب‌تر است؟ در پاسخ باید توجه داشت که x_i را چنان انتخاب می‌کنیم که $\theta = \frac{x-x_i}{h}$ (که در آن x نقطه‌ای است که می‌خواهیم درون‌یابی کنیم) کوچک باشد. اگر x به ابتدای جدول نزدیک باشد به صورت پیشرو و اگر x به انتهای جدول نزدیک باشد به صورت پسرو عمل می‌کنیم. برای پرهیز از افزایش حجم محاسبات، درجه چندجمله‌ای درون‌یاب را بی‌جهت اضافه نمی‌کنیم؛ البته این مطلب بستگی به h دارد (برای h کوچک درون‌یابی خطی (درجه یک) نیز جواب خوبی می‌دهد).*

مثال ۶.۴ *با توجه به جدول داده‌شده مطلوب است مقدار* $\sin(5^\circ)$، $\sin(25^\circ)$ و $\sin(45^\circ)$.

x_i	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°
$\sin(x_i)$	۰	۰/۱۷۳۶	۰/۳۴۲۰	۰/۵	۰/۶۴۲۸	۰/۷۶۶۰

ابتدا جدولی به صورت زیر می‌سازیم

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
۰	۰					
		۰/۱۷۳۶				
۱۰	۰/۱۷۳۶		−۰/۰۰۵۲			
		۰/۱۶۸۴		−۰/۰۰۵۲		
۲۰	۰/۳۴۲۰		−۰/۰۱۰۴		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۵۸۰		−۰/۰۰۴۸		۰
۳۰	۰/۵		−۰/۰۱۵۲		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۴۲۸		−۰/۰۰۴۴		
۴۰	۰/۶۴۲۸		−۰/۰۱۹۶			
		۰/۱۲۳۲				
۵۰	۰/۷۶۶۰					
x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^4 f_i$	$\nabla^5 f_i$

برای درون‌یابی در $x = 5^\circ$، با انتخاب $x_0 = 0^\circ$ داریم $\theta = \frac{x-x_0}{h} = \frac{5^\circ - 0^\circ}{10^\circ} = \frac{1}{2}$. به کمک نتیجه۱.۳.۴ خواهیم داشت

$$\sin(5^\circ) \simeq f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-5+1)}{5!}\Delta^5 f_0,$$

که پس از جایگذاری، مقادیر تقریبی $\sin(۵^\circ)$ *در ادامه در جدول آورده شده است. برای درون‌یابی در* $x = ۴۵^\circ$*، با انتخاب* $x_۴ = ۴۰^\circ$ *داریم* $\theta = \frac{x-x_۴}{h} = \frac{۴۵^\circ - ۴۰^\circ}{۱۰^\circ} = \frac{۱}{۲}$*. به کمک لم ۱.۴.۴ خواهیم داشت*

$$\sin(۴۵^\circ) \simeq f_۴ + \theta\nabla f_۴ + \frac{\theta(\theta+۱)}{۲!}\nabla^۲ f_۴ + \cdots + \frac{\theta(\theta+۱)\cdots(\theta+۴-۱)}{۴!}\nabla^۴ f_۴,$$

که پس از جایگذاری، مقادیر تقریبی $\sin(۴۵^\circ)$ *در ادامه در جدول آورده شده است. برای درون‌یابی در* $x = ۲۵^\circ$ *اگر از* $x_۲ = ۲۰^\circ$ *به صورت پیشرو استفاده کنیم آن‌گاه*

$$\theta = \frac{x - x_۲}{h} = \frac{۲۵^\circ - ۲۰^\circ}{۱۰^\circ} = \frac{۱}{۲}.$$

به کمک نتیجه ۱.۳.۴ داریم

$$\sin(۲۵^\circ) \simeq f_۲ + \theta\Delta f_۲ + \frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۲ + \frac{\theta(\theta-۱)(\theta-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_۲,$$

که پس از جایگذاری، مقادیر تقریبی $\sin(۲۵^\circ)$ *در ادامه در جدول آورده شده است و اگر برای درون‌یابی در* $x = ۲۵^\circ$ *از* $x_۳ = ۳۰^\circ$ *به صورت پسرو استفاده کنیم آن‌گاه*

$$\theta = \frac{x - x_۳}{h} = \frac{۲۵^\circ - ۳۰^\circ}{۱۰^\circ} = -\frac{۱}{۲}.$$

به کمک نتیجه ۱.۴.۴ داریم

$$\sin(۲۵^\circ) \simeq f_۳ + \theta\nabla f_۳ + \frac{\theta(\theta+۱)}{۲!}\nabla^۲ f_۳ + \frac{\theta(\theta+۱)(\theta+۲)}{۳!}\nabla^۳ f_۳,$$

که پس از جایگذاری، مقادیر تقریبی $\sin(۲۵^\circ)$ *در ادامه در جدول آورده شده است.*

مقدار تقریبی $\sin(۵^\circ)$	k *(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)*
۰	۰
$۰ + ۰٫۰۸۶۸ = ۰٫۰۸۶۸$	۱
$۰ + ۰٫۰۸۶۸ + ۰٫۰۰۰۶ = ۰٫۰۸۷۴$	۲
$۰ + ۰٫۰۸۶۸ + ۰٫۰۰۰۶ - ۰٫۰۰۰۳ = ۰٫۰۸۷۱$	۳
$۰ + ۰٫۰۸۶۸ + ۰٫۰۰۰۶ - ۰٫۰۰۰۳ + ۰٫۰۰۰۰ = ۰٫۰۸۷۱$	۴
$۰ + ۰٫۰۸۶۸ + ۰٫۰۰۰۶ - ۰٫۰۰۰۳ + ۰٫۰۰۰۰ - ۰ = ۰٫۰۸۷۱$	۵

k(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)	مقدار تقریبی $\sin(45^\circ)$
۰	۰/۶۴۲۸
۱	۰/۶۴۲۸ + ۰/۰۷۱۴ = ۰/۷۱۴۲
۲	۰/۶۴۲۸ + ۰/۰۷۱۴ − ۰/۰۰۵۷ = ۰/۷۰۸۵
۳	۰/۶۴۲۸ + ۰/۰۷۱۴ − ۰/۰۰۵۷ − ۰/۰۰۱۵ = ۰/۷۰۷۰
۴	۰/۶۴۲۸ + ۰/۰۷۱۴ − ۰/۰۰۵۷ − ۰/۰۰۱۵ + ۰/۰۰۰۱ = ۰/۷۰۷۱

k(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)	مقدار تقریبی $\sin(25^\circ)$ (پیشرو)
۰	۰/۳۴۲۰
۱	۰/۳۴۲۰ + ۰/۰۷۹۰ = ۰/۴۲۱۰
۲	۰/۳۴۲۰ + ۰/۰۷۹۰ + ۰/۰۰۱۹ = ۰/۴۲۲۹
۳	۰/۳۴۲۰ + ۰/۰۷۹۰ + ۰/۰۰۱۹ − ۰/۰۰۰۳ = ۰/۴۲۲۶

k(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)	مقدار تقریبی $\sin(25^\circ)$ (پسرو)
۰	۰/۵۰۰۰
۱	۰/۵۰۰۰ − ۰/۰۷۹۰ = ۰/۴۲۱۰
۲	۰/۵۰۰۰ − ۰/۰۷۹۰ + ۰/۰۰۱۳ = ۰/۴۲۲۳
۳	۰/۵۰۰۰ − ۰/۰۷۹۰ + ۰/۰۰۱۳ + ۰/۰۰۰۳ = ۰/۴۲۲۶

$\triangle$

تذکر ۶.۴ *ممکن است چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو (پسرو) نیوتن برای درون‌یابی f زمانی که x در اواسط جدول قرار دارد مناسب نباشد، زیرا از تمام اطلاعات جدول استفاده نمی‌شود. در این صورت بهتر است درون‌یاب مرکزی مورد استفاده قرار گیرد.*

۲.۴ خطای چندجمله‌ای درون‌یاب

در این بخش قصد داریم به بررسی خطای چندجمله‌ای درون‌یاب بپردازیم.

قضیه ۵.۴ *فرض کنید p چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط متمایز $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b$ باشد. اگر $f \in C^{n+1}[a,b]$ آن‌گاه به ازای هر x در $[a,b]$ عدد $y(x)$ در (a,b) چنان وجود دارد که*

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{n+1}(y(x))}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n).$$

تذکر ۷.۴ *بنابر شرایط قضیه ۵.۴، به ازای هر x در $[a,b]$ داریم*

$$|f(x)-p(x)| \le \frac{M_۱ M_۲}{(n+۱)!},$$

که در آن $M_۱ = \max_{a\le x\le b}|f^{(n+۱)}(x)|$ و

$$M_۲ = \max_{a\le x\le b}|(x-x_۰)(x-x_۱)\cdots(x-x_n)|.$$

واضح است که برای nهای بزرگ، یافتن $M_۲$ مقدور نیست و در چنین حالتی از کران بدبینانه $M_۲ \le (b-a)^{n+۱}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۷.۴ *چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $y=f(x)=\cos(\frac{\pi x}{۸})$ را در نقاط $x_۰=۰, x_۱=۲, x_۲=۳$ به دست آورده و سپس کران بالای خطای درون‌یابی را تعیین نموده و آن را با خطای واقعی در نقطه $x=۱$ مقایسه کنید (محاسبات را با سه رقم اعشار دنبال کنید).* △

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_۰,x_۱,x_۲]$
۰	۱		
		$\frac{۰/۷۰۷-۱}{۲-۰}=-۰/۱۴۷$	
۲	۰/۷۰۷		$\frac{-۰/۳۲۴+۰/۱۴۷}{۳-۰}=-۰/۰۵۹$
		$\frac{۰/۳۸۳-۰/۷۰۷}{۳-۲}=-۰/۳۲۴$	
۳	۰/۳۸۳		

پس چندجمله‌ای درون‌یاب به صورت زیر است

$$p(x)=۱-۰/۱۴۷x-۰/۰۵۹x(x-۲)=۱-۰/۰۲۹x-۰/۰۵۹x^۲.$$

چون $n=۲$ و $f(x)=\cos(\frac{\pi x}{۸})$ داریم

$$f'(x)=-\frac{\pi}{۸}\sin(\frac{\pi x}{۸}),\qquad f''(x)=-\frac{\pi^۲}{۶۴}\cos(\frac{\pi x}{۸}),\qquad f'''(x)=\frac{\pi^۳}{۵۱۲}\sin(\frac{\pi x}{۸}).$$

بنابراین

$$M_۱=\max_{۰\le x\le ۳}|f'''(x)|=\frac{\pi^۳}{۵۱۲}|\sin(\frac{\pi x}{۸})|\le\frac{\pi^۳}{۵۱۲}\simeq ۰/۰۶۱,$$

و

$$M_۲=\max_{۰\le x\le ۳}|x(x-۲)(x-۳)|\le ۳^۳=۲۷.$$

در نتیجه

$$|f(x)-p(x)|\le\frac{M_۱M_۲}{۶}\le\frac{۰/۰۶۱\times ۲۷}{۶}=۰/۲۷۳.$$

اما این کران بالای خطا بدبینانه است و در ادامه کران بالای واقع‌بینانه‌تری به دست می‌آوریم. چون تابع $y=\sin(\frac{\pi x}{8})$ در بازه $[0,3]$ صعودی است!؟ پس داریم

$$M_1=\max_{0\le x\le 3}|f'''(x)|=\frac{\pi^3}{512}\max_{0\le x\le 3}|\sin(\frac{\pi x}{8})|\le\frac{\pi^3}{512}|\sin(\frac{3\pi}{8})|\simeq 0/056.$$

هم‌چنین با فرض $g(t)=t(t-2)(t-3)$ داریم $g'(t)=3t^2-10t+6$ و بنابراین از $g'(t)=0$ نتیجه می‌شود $t_1=\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ و $t_2=\frac{5-\sqrt{7}}{3}$. حال چون t_1 و t_2 به بازه $[0,3]$ تعلق دارند، خواهیم داشت

$$M_2=\max\{|g(0)|,|g(t_1)|,|g(t_2)|,|g(3)|\}=\{0,2/113,0/631,0\}=2/113.$$

پس

$$|f(x)-p(x)|\le\frac{M_1M_2}{6}\le\frac{0/056\times 2/113}{6}=0/020.$$

از طرفی داریم

$$|f(1)-p(1)|=|0/924-0/912|=0/012<0/020<0/273.$$

تذکر ۸.۴ *اگر p چندجمله‌ای درون‌یاب f در نقاط $x_0,\ldots,x_n$ با روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن باشد، چندجمله‌ای درون‌یاب f در نقاط $x_0,\ldots,x_n,t$ با همان روش به صورت زیر به دست می‌آید*

$$q(x)=p(x)+f[x_0,x_1,\ldots,x_n,t](x-x_0)\cdots(x-x_n),$$

و چون $f(t)=q(t)$ بنابراین

$$f(t)=p(t)+f[x_0,x_1,\ldots,x_n,t](t-x_0)\cdots(t-x_n),$$

که با مقایسه با قضیه خطای چندجمله‌ای درون‌یاب خواهیم داشت $f[x_0,\ldots,x_n,t]=\frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!}$ و می‌توان نوشت $f[x_0,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

۳.۴ برون‌یابی و درون‌یابی وارون

در حالت کلی برای برون‌یابی ابزارهای پیشرفته‌تری نیاز است ولی برای برون‌یابی در نقاطی که نزدیک دو انتهای بازه داده شده $[a,b]$ باشند می‌توان از همان چندجمله‌ای درون‌یاب استفاده کرد و با توجه به مشکلات درون‌یابی باید توجه داشت که هرچه از دو انتها دور شویم اعتبار نتایج کمتر می‌شود. اما برای درون‌یابی وارون می‌توان از ابزارهای درون‌یابی به خوبی سود برد. در ادامه دو ایده برای حل این مسئله مطرح می‌گردد. ایده اول آن است که فرض کنید p چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط $x_0<x_1<\cdots<x_n$ باشد. با به کار بردن یکی از روش‌های فصل ریشه‌یابی مانند نیوتن یا

تکرار ساده در حل معادله $p(\bar{x}) = f(\bar{x})$، تقریبی از $\bar{x}$ به دست می‌آید.

مثال ۸.۴ *با توجه به جدول داده‌شده مطلوب است مقدار $\bar{x}$ به طوری که $\sinh(\bar{x}) = ۵$.*

x_i	۱	۲	۳	۴
$\sinh(x_i)$	۱/۱۷۵۲	۳/۶۲۶۹	۱۰/۰۱۷۹	۲۷/۲۸۹۹

ابتدا جدولی به صورت زیر می‌سازیم

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^۲ f_i$	$\Delta^۳ f_i$
۱	۱/۱۷۵۲			
		۲/۴۵۱۷		
۲	۳/۶۲۶۹		۳/۹۳۹۳	
		۶/۳۹۱۰		۶/۹۴۱۷
۳	۱۰/۰۱۷۹		۱۰/۸۸۱۰	
		۱۷/۲۷۲۰		
۴	۲۷/۲۸۹۹			

به کمک نتیجه۱.۳.۴ می‌توان نوشت

$$p(\bar{x}) = f_۰ + \theta \Delta f_۰ + \frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۰ + \frac{\theta(\theta-۱)(\theta-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_۰.$$

که در آن با انتخاب $x_۰ = ۱$ داریم $\theta = \frac{\bar{x}-x_۰}{h} = \bar{x} - ۱$ و در نتیجه

$$p(\bar{x}) = ۱/۱۷۵۲ + ۲/۴۵۱۷(\bar{x}-۱) + \frac{۳/۹۳۹۳}{۲}(\bar{x}-۱)(\bar{x}-۲) + \frac{۶/۹۴۱۷}{۶}(\bar{x}-۱)(\bar{x}-۲)(\bar{x}-۳),$$

و یا

$$p(\bar{x}) = ۱/۱۵۷۰\bar{x}^۳ - ۴/۹۷۲۱\bar{x}^۲ + ۹/۲۶۹۲\bar{x} - ۴/۲۷۸۹.$$

بنابراین $\bar{x}$ از حل معادله $p(\bar{x}) = ۵$ به دست می‌آید. جدول زیر تکرارهای روش نیوتن را با انتخاب $t_۰ = ۲/۳$ برای تابع $g(t) = p(t) - ۵ = ۱/۱۵۷۰t^۳ - ۴/۹۷۲۱t^۲ + ۹/۲۶۹۲t - ۹/۲۷۸۹$ نشان می‌دهد

n	۱	۲	۳
t_n	۲/۳۳۸۹	۲/۳۳۸۰	۲/۳۳۸۰

پس با دقت $۳D$ داریم $\bar{x} = ۲/۳۳۸$ و $g(۲/۳۳۸) = ۰/۰۰۰۰$ اما $\sinh(۲/۳۳۸) - ۵ = ۰/۱۳۲۰$!? △

اما ایده دوم آن است که فرض کنید تابع $y=f(x)$ در بازه‌ای شامل x_iها وارون‌پذیر است و جدول زیر را در نظر بگیرید.

y_i	$y_۰$	$y_۱$	$\cdots$	y_n
x_i	$x_۰$	$x_۱$	$\cdots$	x_n

اگر $x=q(y)$ چندجمله‌ای درون‌یاب صادق در جدول باشد که با یکی از روش‌های درون‌یابی لاگرانژ یا تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن به دست آمده باشد، آن‌گاه داریم $q(f(\bar{x}))\simeq\bar{x}$. یعنی $x=q(y)$ را به عنوان تقریبی از تابع وارون $y=f(x)$ می‌پذیریم.

مثال ۹.۴ *یک کاربرد جالب از درون‌یابی وارون در ریشه‌یابی است. تقریبی از ریشه تابعی که از آن تابع فقط اطلاعات زیر در دسترس است بیابید. سپس جواب خود را آزمایش کنید.*

$$f(۰)=-۱,\qquad f(۰/۵)=-۰/۳۷۷۶,\qquad f(۱)=۰/۴۵۹۷,\qquad f(۱/۵)=۱/۴۲۹۳.$$

ابتدا جدول تفاضلات تقسیم‌شده را به صورت زیر ساخته

f_i	x_i	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم
-۱	۰			
		$\frac{۰/۵-۰}{-۰/۳۷۷۶-(-۱)}=۰/۸۰۳۳$		
$-۰/۳۷۷۶$	$۰/۵$		$-۰/۱۴۱۲$	
		$\frac{۱-۰/۵}{۰/۴۵۹۷-(-۰/۳۷۷۶)}=۰/۵۹۷۲$		$۰/۰۳۹۶$
$۰/۴۵۹۷$	۱		$-۰/۰۴۵۱$	
		$\frac{۱/۵-۱}{۱/۴۲۹۳-۰/۴۵۹۷}=۰/۵۱۵۷$		
$۱/۴۲۹۳$	$۱/۵$			

و از $f(\alpha)=۰$ داریم $\alpha\simeq ۰+۰/۸۰۳۳(۱)-۰/۱۴۱۲(۱)(۰/۳۷۷۶)+۰/۰۳۹۶(۱)(۰/۳۷۷۶)(-۰/۴۵۹۷)$. *پس* $\alpha\simeq ۰/۷۴۳۱$. *برای آزمایش جواب به جدول تفاضلاتی زیر نیاز داریم.*

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^۲ f_i$	$\Delta^۳ f_i$
۰	-۱			
		$۰/۶۲۲۴$		
$۰/۵$	$-۰/۳۷۷۶$		$۰/۲۱۴۹$	
		$۰/۸۳۷۳$		$-۰/۰۸۲۶$
۱	$۰/۴۵۹۷$		$۰/۱۳۲۳$	
		$۰/۹۶۹۶$		
$۱/۵$	$۱/۴۲۹۳$			

سپس به کمک نتیجه ۱.۳.۴ می‌توان نوشت

$$p(x) = f_{0} + \theta\Delta f_{0} + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^{2} f_{0} + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^{3} f_{0}.$$

که در آن با انتخاب $x_{0} = 0$ *داریم* $\theta = \frac{x-x_{0}}{h} = \frac{0/7431-0}{0/5} = 1/4862$ *و در نتیجه*

$$p(0/7431) = -1 + 0/6224(1/4862) + \frac{0/2149}{2}(1/4862)(0/4862) + \\ \frac{-0/0826}{6}(1/4862)(0/4862)(-0/5138),$$

و بنابراین $p(0/7431) \simeq 0/0078$ *که بیانگر آن است که* $0/7431$ *تقریبی از* α *است.* △

۴.۴ تقریب کم‌ترین مربعات گسسته

در فصل ۱ با چندجمله‌ای تیلور درجه n حول نقطه x_{0} آشنا شدیم که تقریب خوبی برای یک تابع $n+1$ بار مشتق‌پذیر در همسایگی کوچکی از x_{0} است. از چندجمله‌ای درون‌یاب نیز می‌توان به عنوان تقریبی از یک تابع استفاده نمود ولی این چندجمله‌ای فقط در نقاط معلوم دقیق است (صرف نظر از خطای گرد کردن) و در سایر نقاط ممکن است حتی جوابی دور از انتظار تولید کند. در این فصل، قصد داریم یک چندجمله‌ای بسازیم که تقریب مناسبی! برای یک تابع معلوم (مجهول) باشد. در اینجا با یکی از دو مسئله کلی زیر مواجه هستیم

- در جستجوی تابعی (چندجمله‌ای) هستیم که برای داده‌های یک جدول مناسب! باشد؛

- تابعی با ضابطه پیچیده در دسترس است و می‌خواهیم به جای کار کردن با آن، از نوع ساده‌تری از توابع مانند چندجمله‌ای‌ها استفاده کنیم که تقریب مناسبی! برای تابع باشد.

به منظور بررسی مسئله اول، فرض کنید از تابع f فقط داده‌های جدولی

x_i	x_1	$\cdots$	x_m
f_i	f_1	$\cdots$	f_m

در دسترس باشد و بخواهیم چندجمله‌ای $p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ را چنان بیابیم که تقریب مناسبی برای تابع نامعلوم f باشد. برای مفهوم دادن به واژه «تقریب مناسب»، ابتدا به نظر می‌رسد باید ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ را به گونه‌ای یافت که عبارت

$$E_{\infty}(a_0, \ldots, a_n) = \max_{1 \le k \le m} |f_k - p_n(x_k)|$$

کمینه شود. این مسئله از نوع اقل‌اکثر بوده و در اینجا قادر به حل آن نخواهیم بود. ایده دیگری که به ذهن می‌رسد آن است که برای تعیین ضرایب $a_0,\dots,a_n$ تابع

$$E_1(a_0,\dots,a_n)=\sum_{k=1}^{m}|f_k-p_n(x_k)|$$

کمینه شود و به همین منظور بنابر آن چه که از حساب دیفرانسیل و انتگرال آموختیم باید عبارت $\frac{\partial E_1}{\partial a_i}$ را یافته و برابر صفر قرار دهیم که عدم مشتق‌پذیری تابع قدرمطلق مانع از ادامه کار می‌گردد. اما می‌توان برای تعیین ضرایب $a_0,\dots,a_n$ تابع

$$E_2(a_0,\dots,a_n)=\sum_{k=1}^{m}(f_k-p_n(x_k))^2$$

را کمینه کرد. این مسئله به مسئله کم‌ترین مربعات[1] گسسته معروف است و برای حل آن برای $i=0,1,\dots,n$ باید داشته باشیم $\frac{\partial E_2}{\partial a_i}=0$ و در نتیجه

$$0=\frac{\partial E_2}{\partial a_i}=\frac{\partial}{\partial a_i}\sum_{k=1}^{m}\left(f_k-\sum_{j=0}^{n}a_jx_k^j\right)^2=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial a_i}\left(f_k-\sum_{j=0}^{n}a_jx_k^j\right)^2$$

و یا

$$0=-2\sum_{k=1}^{m}x_k^i\left(f_k-\sum_{j=0}^{n}a_jx_k^j\right)$$

و از آن جا

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}x_k^{i+j}\right)a_j=\sum_{k=1}^{m}f_kx_k^i,\qquad i=0,1,\dots,n.$$

این دستگاه $(n+1)\times(n+1)$ به دستگاه معادلات نرمال معروف است و از حل آن ضرایب $a_0,\dots,a_n$ به دست می‌آیند. با قرار دادن

$$\begin{aligned}
&\alpha=[a_i]_{(n+1)\times 1},\\
&\beta=[\beta_i]_{(n+1)\times 1},\qquad \beta_i=\sum_{k=1}^{m}f_kx_k^i,\qquad i=0,1,\dots,n,\\
&S=[s_{ij}]_{(n+1)\times(n+1)},\qquad s_{ij}=\sum_{k=1}^{m}x_k^{i+j},\qquad i,j=0,1,\dots,n
\end{aligned}$$

می‌توان دستگاه معادلات نرمال را به صورت فشرده $S\alpha=\beta$ و یا به شکل گسترده زیر نیز بیان نمود

$$\begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & \cdots & s_{0n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ s_{n0} & s_{n1} & \cdots & s_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

[1] least squares

مثال ۱۰.۴ *یک چندجمله‌ای درجه دو (سهمی) مناسب داده‌های جدولی زیر بسازید.*

x_i	۰	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۰۰
f_i	۱/۰۰۰۰	۱/۲۸۴۰	۱/۶۴۸۷	۲/۱۱۷۰	۲/۷۱۸۳

در اینجا $m=5$ *و* $n=2$ *و دستگاه معادلات نرمال به صورت زیر است*

$$\begin{aligned} 5a_0 &+ 2.5a_1 &+ 1.875a_2 &= 8.7680 \\ 2.5a_0 &+ 1.875a_1 &+ 1.5625a_2 &= 5.4514 \\ 1.875a_0 &+ 1.5625a_1 &+ 1.3828a_2 &= 4.4015 \end{aligned}$$

و از حل آن داریم $a_0 = 1.0051$، $a_1 = 0.86468$ *و* $a_2 = 0.84316$. *پس*

$$p_2(x) = 0.84316x^2 + 0.86468x + 1.0051$$

و بنابراین

x_i	۰	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۰۰
f_i	۱/۰۰۰۰	۱/۲۸۴۰	۱/۶۴۸۷	۲/۱۱۷۰	۲/۷۱۸۳
$p_2(x_i)$	۱/۰۰۵۱	۱/۲۷۴۰	۱/۶۴۸۲	۲/۱۲۷۹	۲/۷۱۲۹
$f_i - p_2(x_i)$	−۰/۰۰۵۱	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۰۴	−۰/۰۱۰۹	۰/۰۰۵۴

هم‌چنین

$$E_2 = \sum_{k=1}^{5} (f_k - p_2(x_k))^2 = 2.74 \times 10^{-4}.$$

△

مثال ۱۱.۴ *برای یافتن تابعی به یکی از شکل‌های زیر، مناسب داده‌های* (x_i, y_i) *راه‌کار ارایه دهید.*

$$y = ae^{bx}, \qquad y = ax^4 + bx^2.$$

برای مورد $y = ae^{bx}$ *داریم* $\ln y = \ln(ae^{bx})$ *و یا* $\ln y = \ln a + bx$ *و با تغییر متغیرهای* $Y = \ln y$ *و* $A = \ln a$ *کافی است خط* $Y = A + bx$ *را چنان یافت که مناسب داده‌های* $(x_i, \ln y_i)$ *باشد و در آخر قرار دهیم* $a = e^A$. *برای مورد* $y = ax^4 + bx^2$ *داریم* $\frac{y}{x^2} = ax^2 + b$ *و با تغییر متغیرهای* $Y = \frac{y}{x^2}$ *و* $X = x^2$ *کافی است خط* $Y = aX + b$ *را چنان یافت که مناسب داده‌های* $\left(x_i^2, \frac{y_i}{x_i^2}\right)$ *باشد.* △

تمرین

۱. الف) برای نقاط جدول زیر چندجمله‌ای درونیاب را به روش مناسب بیابید.

x	-۱	۰	۱	۳
$f(x)$	-۱	۱	-۱	۰

ب) اگر بدانیم برای هر $x \in [-۱, ۳]$ داریم $|f^{(۴)}(x)| \leq ۱$ خطای درونیابی در $x = ۲$ حداکثر چقدر است؟

ج) آیا با اضافه کردن نقطه $(۴, \frac{۲۳}{۲})$ درجه چندجمله‌ای درونیاب بیشتر می‌شود؟ چرا؟

۲. یک تابع به شکل $y = ax + bx^۳$ به داده‌های جدول زیر برازش دهید.

x_i	-۲	-۱	۱	۲
y_i	۴	۱	-۱	۴

۳. جدول زیر را برای تابع $y = f(x)$ در بازه $[۰, ۱]$ در نظر بگیرید. به روش درونیابی مناسب برای نقاط هم‌فاصله مقدار $f(۰/۱)$ را تقریب بزنید.

x	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱
$f(x)$	۳/۵	۱/۷۵	۱	۱/۲۵	۲

۴. با نقاط $x_k = \frac{k}{۲}$ ، $k = ۰, ۱, ۲$، کران خطای درونیابی $\ln(۱ + x)$ را برای $۰ \leq x \leq ۱$ به دست آورید.

۵. الف) فرض کنید $P_۱(x)$ چندجمله‌ای درونیاب درجه یک تابع $f(x) = e^{-x^۲}$ در نقاط $x_۰ = ۰$ و $x_۱ = ۲$ باشد. نشان دهید برای هر $x \in [۰, ۲]$ داریم

$$|f(x) - P_۱(x)| \leq ۱$$

ب) a را طوری تعیین کنید که با اضافه کردن نقطه $(۵, a)$ به جدول زیر، درجه چندجمله‌ای درونیاب تغییر نکند.

x	۱	۲	۳	۴
$g(x)$	۲	۱۱	۳۲	۷۱

۶. ضرایب a و b را چنان بیابید که تابع $y = \frac{۱}{ax^۲ + b}$ بهترین تقریب (به مفهوم کمترین مربعات) برای داده‌های جدول زیر باشد.

x_i	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
y_i	۱	۰/۵	۰/۲	۰/۱

۷. چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x) = x^۳ + x^۲ - x - ۱$ در نقاط $-۱, ۰, ۱, ۲$ کدام است؟

الف) $p(x) = x^۳ + x^۲ - x - ۱$ ب) $p(x) = x^۳$ ج) $p(x) = x(x^۲ - ۱)$ د) $p(x) = x^۳ - ۱$

۸. صرف نظر از خطای گرد کردن، کدام گزینه در مورد چندجمله‌ای درون‌یاب درجه $n - ۱$ تابع f درست است؟

الف) روش‌های لاگرانژ و تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن همواره جواب یکسانی می‌دهند.

ب) این دو روش فقط وقتی f چندجمله‌ای درجه n باشد، جواب یکسانی می‌دهند.

ج) این دو روش هیچ‌گاه جواب یکسانی نمی‌دهند.

د) این دو روش فقط وقتی f چندجمله‌ای درجه $n - ۱$ باشد، جواب یکسانی می‌دهند.

۹. برای آن که منحنی $y = \frac{۱}{(ax+b)^۲}$، داده‌های جدول

x_i	۰	۰/۵	۱
y_i	۱	۰/۲۵	۰/۱۶

را به روش کمترین مربعات برازش کند، مقادیر a, b کدامند؟

الف) $a = ۲,\ b = ۱$ ب) $a = ۱,\ b = ۲$ ج) $a = ۱/۵,\ b = ۱/۰۸$ د) $a = ۱/۰۸,\ b = ۱/۵$

۱۰. درجه چندجمله‌ای درون‌یاب نظیر داده‌های جدول

x	۱	۲	−۱	۰	۳
y	۳	۸	−۱	۰	۱۵

چند است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۳

۱۱. فرض کنید $p(x) = x^۲ + x + ۱$ چندجمله‌ای درون‌یاب نظیر نقاط $(۰, ۱)$، $(۱, ۳)$ و $(−۱, ۱)$ باشد. با اضافه شدن نقطه $(x_۰, f(x_۰))$، اگر بدانیم $f[−۱, ۱, ۰, x_۰] = ۲$ درون‌یاب جدید کدام خواهد بود؟

الف) $۲x^۳ − ۲x^۲ − ۲x + ۱$ ب) $۲x^۳ − x^۲ + x + ۱$ ج) $۲x^۳ + x^۲ − x + ۱$ د) $۲x^۳ − x^۲ − ۳x + ۱$

۱۲. اگر $L_۱(x),\ L_۲(x),\ L_۳(x)$ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ متناظر با نقاط $x_۱ = ۱,\ x_۲ = ۲,\ x_۳ = ۳$ باشند و به ازای هر x داشته باشیم $c_۱L_۱(x) + c_۲L_۲(x) + c_۳L_۳(x) = ۱$ آن‌گاه $c_۱ + c_۲ + c_۳$ کدام است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۳ د) ۳-

۱۳. مقدار تقریبی $\sqrt{۰/۲۵}$ را به کمک روش درونیابی چندجمله‌ای مناسب در نقاط $۰/۱, ۰/۱۵, ۰/۲, ۰/۳$ تقریب بزنید. سپس کرانی برای خطای تقریب محاسبه کنید.

۱۴. الف) چندجمله‌ای درون‌یاب درجه دو تابع $f(x) = e^x$ را در نقاط $x = ۰, ۰/۵, ۱/۵$ با روش درون‌یابی مناسب به دست آورید.

ب) کوچکترین کران خطای حاصل از درون‌یابی قسمت قبل را تعیین کنید.

۱۵. ضرایب a و b را به گونه‌ای بیابید که منحنی $y = \frac{۲}{ax+b}$ بهترین تقریب (به مفهوم کمترین مربعات) داده‌های جدول زیر باشد.

x_i	۰	۱	۳	۵	۷
y_i	−۱	۱	۲	۲	۳

۱۶. برای یافتن تابعی به یکی از شکل‌های زیر، مناسب داده‌های (x_i, y_i) راه‌کار ارایه دهید.

$$y = ax^۳ + b, \qquad y = ax^۴ + bx^۳ + cx^۲, \qquad y = \frac{a}{bx+c}, \qquad y = \frac{ax^۲}{bx^۲+c}, \qquad y = a\cos x + b.$$

۱۷. الف) در جدول تفاضلات تقسیم‌شده زیر، جاهای خالی را مشخص کنید.

x_i	y_i	تفاضل تقسیم‌شده مرتبه ۱	تفاضل تقسیم‌شده مرتبه ۲	تفاضل تقسیم‌شده مرتبه ۳
$\square$	-1			
		2		
0	$\square$		-2	
		$\square$		$\frac{5}{6}$
$\square$	-1		$\frac{4}{3}$	
		2		
3	$\square$			

ب) چندجمله‌ای درون‌یاب را در نقاط $(-1,-1)$، $(0,1)$، $(1,-1)$ و $(3,3)$ به دست آورید. سپس نشان دهید اگر نقطه $(2,-2)$ به داده‌های قبلی اضافه شود، درجه چندجمله‌ای افزایش نمی‌یابد.

۱۸. چندجمله‌ای بهترین تقریب درجه دوم مناسب جدول

x_i	-2	-1	1	2
y_i	0	-3	3	4

را به کمک روش کمترین مربعات بیابید.

۱۹. اگر $x_0=-1$، $x_1=0$، $x_2=-2$، $x_3=4$ و $x_4=-3$، مقدار $(L_4(x_3))^2-4L_0(x_1)+3L_2(x_2)$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۰ ج) ۴ د) ۳

۲۰. حداکثر خطای درون‌یابی تابع $f(x)=\ln(x)$ در نقاط $x_0=1$ و $x_1=1/5$ چند است؟

الف) ۰/۰۳۱۲ ب) ۰/۰۲۱۳ ج) ۰/۰۱۲۳ د) ۰/۵

۲۱. مقدار درونیاب مبتنی بر نقاط $(-0/5,1)$، $(0,0)$، $(0/5,-1)$ و $(1,0)$ در نقطه $x=0/25$ کدام است؟

الف) ۰/۶۵۲ ب) ۰/۶۵۲− ج) ۰/۶۲۵ د) ۰/۶۲۵−

۲۲. درجه چندجمله‌ای درونیاب مبتنی بر نقاط $(-1,-6)$ ، $(0,-3)$ ، $(1,2)$ ، $(3,18)$ و $(-2,-7)$ کدام است؟

الف) ۵ ب) ۴ ج) ۳ د) ۲

۲۳. کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف) خطای درون‌یابی در $n+1$ نقطه واقع بر یک چندجمله‌ای از درجه n، صفر است.

ب) درون‌یاب در $n+1$ نقطه، یک چندجمله‌ای دقیقاً از درجه n است.

ج) در محاسبه تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن، امکان انتشار خطا وجود دارد.

د) در محاسبه تفاضلات پیشرو، امکان انتشار خطا وجود دارد.

۲۴. بهترین تابع به شکل $y=\dfrac{1}{ax^2+b}$ به مفهوم کمترین مربعات مناسب داده‌های زیر را مشخص کنید؟

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	3	2	1