فصل ۵

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

در این فصل قصد داریم روش‌های عددی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را بررسی کنیم. در مشتق‌گیری عددی می‌خواهیم تقریبی از $f'(x)$ را به دست آوریم به طوری که x یک نقطه داده‌شده و معلوم است. در انتگرال‌گیری عددی سعی بر آن داریم که مقدار عددی $\int_a^b f(x)dx$ را تقریب بزنیم.

۱.۵ مشتق‌گیری عددی

در این بخش یا با یک تابع مواجه هستیم که ترجیح می‌دهیم به طور مستقیم از ضابطه آن مشتق نگیریم و یا ممکن است با جدولی از مقدارهای یک تابع مشتق‌پذیر روبرو باشیم و قصد داشته باشیم مشتق‌گیری را به صورت عددی (تقریبی) انجام دهیم و برای این منظور از بین روش‌های مبتنی بر چندجمله‌ای درون‌یاب، مبتنی بر بسط تیلور و روش گاوس، روش بسط تیلور را بررسی خواهیم کرد.

۱.۱.۵ روش مبتنی بر بسط تیلور

برای به دست آوردن رابطه‌های تقریبی مشتق، می‌توان از بسط تیلور توابع

$$\ldots, f(x-۲h), f(x-h), f(x+h), f(x+۲h), \ldots$$

استفاده کرده و یک ترکیب خطی از آن‌ها به گونه‌ای ساخت که خطا از مرتبه $O(h^p)$ و یا درجه دقت روش n باشد.

تعریف ۱.۵ *مرتبه دقت (صحت) یک فرمول (رابطه) تقریبی، عدد طبیعی n است اگر آن فرمول برای چندجمله‌ای‌های تا درجه n دقیق باشد. به عنوان نمونه اگر ضریب h^p در یک رابطه با خطای $O(h^p)$ برابر $f^{(p+۱)}(y)$ باشد آن‌گاه مرتبه دقت آن روش به وضوح p خواهد بود.*

به کمک بسط‌های تیلور

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^۲}{۲!}f''(x) + \frac{h^۳}{۳!}f'''(x) + \cdots,$$

و

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^۲}{۲!}f''(x) - \frac{h^۳}{۳!}f'''(x) + \cdots$$

داریم

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{۲!}f''(x) - \frac{h^۲}{۳!}f'''(x) + \cdots,$$
$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \frac{h}{۲!}f''(x) - \frac{h^۲}{۳!}f'''(x) + \cdots$$

که از آنجا برای نقاط هم‌فاصله $\ldots, x_{i-۲}, x_{i-۱}, x_i, x_{i+۱}, x_{i+۲}, \ldots$ (با فاصله h $x_{i+۱} - x_i = h$) و با فرض $x = x_i$، خواهیم داشت

$$f'_i = f'(x_i) = \frac{f_{i+۱} - f_i}{h} + O(h), \qquad f'_i = f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-۱}}{h} + O(h)$$

که به ترتیب به فرمول‌های پیشرو و پسرو دو نقطه‌ای برای مشتق اول معروف بوده و درجه دقت آنها یک است یعنی این فرمول‌ها برای چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر یک دقیق هستند. با کم کردن بسط‌های تیلور $f(x-h)$ و $f(x+h)$ از هم نتیجه می‌گیریم

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{۲h} - \frac{h^۲}{۳!}f^{(۳)}(x) - \frac{h^۴}{۵!}f^{(۵)}(x) - \cdots$$

و از آنجا یک فرمول مرکزی سه نقطه‌ای به صورت

$$f'_i = \frac{f_{i+۱} - f_{i-۱}}{۲h} + O(h^۲)$$

برای مشتق اول به دست می‌آید که دارای درجه دقت دو است. حال می‌توان به کمک بسط‌های تیلور $f_{i+۱}$ و $f_{i+۲}$ یک فرمول پیشرو سه نقطه‌ای به صورت

$$f'_i = f'(x_i) \simeq \frac{-۳f_i + ۴f_{i+۱} - f_{i+۲}}{۲h}$$

ساخت که دارای درجه دقت دو است و خطایی از مرتبه $O(h^۲)$ دارد و با تغییر h به $-h$ در آن، فرمول پسرو سه نقطه‌ای

$$f'_i \simeq \frac{f_{i-۲} - ۴f_{i-۱} + ۳f_i}{۲h}$$

به دست می‌آید که دارای درجه دقت دو است و خطایی از مرتبه $O(h^۲)$ دارد. هم‌چنین به کمک بسط‌های تیلور

$$f(x \pm ۲h) = f(x) \pm ۲hf'(x) + \frac{(۲h)^۲}{۲!}f''(x) \pm \frac{(۲h)^۳}{۳!}f'''(x) + \cdots$$

و ساختن ترکیب خطی $f(x-۲h) - ۸f(x-h) + ۸f(x+h) - f(x+۲h)$ به رابطه

$$f'(x) = \frac{۱}{۱۲h}(f(x-۲h) - ۸f(x-h) + ۸f(x+h) - f(x+۲h)) + \frac{h^۴}{۳۰}f^{(۵)}(\xi)$$

خواهیم رسید که یک رابطه مرکزی پنج نقطه‌ای با خطای برشی $O(h^۴)$ است و در آن $x - ۲h \le \xi \le x + ۲h$.

همچنین با جمع بسط‌های تیلور $f_{i+۱}$ و $f_{i-۱}$ داریم

$$f''(x_i) = f''_i = \frac{f_{i-۱} - ۲f_i + f_{i+۱}}{h^۲} - \frac{۲h^۲}{۴!} f^{(۴)}(x_i) - \frac{۲h^۴}{۶!} f^{(۶)}(x_i) - \cdots$$

که یک فرمول مرکزی سه نقطه‌ای برای مشتق مرتبه دوم با درجه دقت سه است و خطایی از مرتبه $O(h^۲)$ دارد و به طور مشابه می‌توان فرمول‌های پیشرو یا پسرو نه تنها برای مشتق مرتبه دو بلکه برای سایر مراتب مشتق به دست آورد.

تذکر ۱.۵ *در حالت کلی رابطه‌های مشتق دارای خطایی از مرتبه $O(h^p)$ هستند که بستگی به تعداد نقاط دارد. در ظاهر یا باید p بزرگ باشد که به افزایش محاسبات (فراخوانی بیشتر تابع f) و رشد خطای گرد کردن منجر می‌شود و یا باید h کوچک باشد که این نیز ممکن است مشکل‌ساز باشد. به عنوان نمونه در محاسبه $\frac{f_{i+۱}-f_i}{h}$ اگر h کوچک باشد f_i و $f_{i+۱}$ به هم نزدیک خواهند بود و ممکن است باعث از بین رفتن ارقام بامعنا و در نتیجه تولید خطا شود. به علاوه این خطا به عدد کوچک h تقسیم می‌شود که خطای تولیدشده را افزایش خواهد داد. بنابر این سعی می‌کنیم مشتق‌گیری عددی را با احتیاط انجام دهیم.*

مثال ۱.۵ *با استفاده از جدول زیر برای مقادیر تابع $y = f(x)$، مقدار تقریبی $f'(۲)$ را با استفاده از فرمول‌های سه و پنج نقطه‌ای و همچنین تقریبی برای $f''(۲)$ به دست آورید.*

x_i	۱/۸	۱/۹	۲/۰	۲/۱	۲/۲
f_i	۱۰/۸۸۹۳۶۵	۱۲/۷۰۳۱۹۹	۱۴/۷۷۸۱۱۲	۱۷/۱۴۸۹۵۷	۱۹/۸۵۵۰۳۰

به ازای $h = ۰/۱$ و فرمول سه نقطه‌ای پیشرو داریم

$$f'(۲) = \frac{۱}{۰/۲} \times [-۳f(۲) + ۴f(۲/۱) - f(۲/۲)] = ۲۲/۰۳۲۳۱۰$$

به همین ترتیب به ازای $h = ۰/۱$ و فرمول سه نقطه‌ای پسرو خواهیم داشت

$$f'(۲) = \frac{۱}{۰/۲} \times [۳f(۲) - ۴f(۱/۹) + f(۱/۸)] = ۲۲/۰۵۴۵۲۵$$

اما به ازای $h = ۰/۱$ و فرمول سه نقطه‌ای مرکزی داریم

$$f'(۲) = \frac{۱}{۰/۲} \times [f(۲/۱) - f(۱/۹)] = ۲۲/۲۲۸۷۹۰$$

و به ازای $h = ۰/۲$ و فرمول سه نقطه‌ای مرکزی می‌توان نوشت

$$f'(۲) = \frac{۱}{۰/۴} \times [f(۲/۲) - f(۱/۸)] = ۲۲/۴۱۴۱۶۳$$

سرانجام به ازای $h = ۰/۱$ و فرمول پنج نقطه‌ای مرکزی داریم

$$f'(۲) = \frac{۱}{۱/۲} \times [f(۱/۸) - ۸f(۱/۹) + ۸f(۲/۱) - f(۲/۲)] = ۲۲/۱۶۶۹۹۹$$

روشن است که برای استفاده از سایر فرمول‌های پنج نقطه‌ای داده‌ها کافی نیستند. در این مثال $f(x) = xe^x$ و مقدار واقعی $f'(۲) = ۲۲/۱۶۷۱۶۸$ نشان می‌دهد که خطای این روش‌ها به ترتیب عبارت است از $۱/۳۵ \times ۱۰^{-۱}$، $۱/۱۳ \times ۱۰^{-۱}$، $-۶/۱۶ \times ۱۰^{-۲}$، $-۲/۴۷ \times ۱۰^{-۱}$ و $۱/۶۹ \times ۱۰^{-۴}$. حال به ازای $h = ۰/۱$ و $h = ۰/۲$ به ترتیب نتایج زیر از فرمول مرکزی به دست می‌آیند

$$f''(۲) \simeq \frac{۱}{۰/۰۱}[f(۱/۹) - ۲f(۲) + f(۲/۱)] = ۲۹/۵۹۳۲۰۰,$$

$$f''(۲) \simeq \frac{۱}{۰/۰۴}[f(۱/۸) - ۲f(۲) + f(۲/۲)] = ۲۹/۷۰۴۲۷۵$$

که خطای آنها به ترتیب عبارت است از $-۳/۷۰ \times ۱۰^{-۲}$ و $-۱/۴۸ \times ۱۰^{-۱}$. △

۲.۵ انتگرال‌گیری عددی

محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ زمانی که تابع اولیه f در دسترس نیست یا محاسبه تابع اولیه به سادگی امکان‌پذیر نیست و یا وقتی از f فقط داده‌های جدولی در دسترس است از مسایل اساسی انتگرال‌گیری است. برای حل این مسئله، در این بخش قصد داریم انتگرال‌گیری را به صورت عددی (تقریبی) انجام دهیم. به عنوان مثال می‌توان به انتگرال‌های $\int_۰^b e^{-x^۲}dx$، $\int_{-a}^a \sqrt[n]{۱ + x^n}dx$ و $\int_۰^۱ \frac{۱}{۱+x^n}dx$ اشاره کرد. ایده اصلی انتگرال‌گیری عددی همان ایده یافتن مساحت ناحیه محصور به منحنی $y = f(x)$، محور xها و خطوط $x = a$ و $x = b$ است. یعنی ابتدا افرازی منظم به صورت $a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b$ برای بازه $[a, b]$ در نظر می‌گیریم که در آن $x_{i+۱} - x_i = h$ و $h = \frac{b-a}{n}$، سپس چندجمله‌ای درون‌یاب f در نقاط $x_i, \ldots, x_{i+m}$ یعنی p_m را ساخته و $\int_{x_i}^{x_{i+m}} p_m(x)dx$ را محاسبه نموده و با جمع نمودن این انتگرال‌ها، تقریبی برای $\int_a^b f(x)dx$ به دست می‌آوریم. به شکل ۱.۵ توجه کنید.

شکل ۱.۵: ایده انتگرال‌گیری عددی

۱.۲.۵ قاعده ذوزنقه

چندجمله‌ای درون‌یاب درجه اول ($m=1$) تابع f در نقاط x_i و x_{i+1} به صورت $p_1(x)=f_i+\theta\Delta f_i$ است که در آن $\theta=\frac{x-x_i}{h}$. سپس با انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_1(x)dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i+\theta\Delta f_i)dx \\ &= \int_0^1 (f_i+\theta\Delta f_i)hd\theta = h\left(\theta f_i+\frac{\theta^2}{2}\Delta f_i\right)_0^1\end{aligned}$$

در نتیجه قاعده ذوزنقه ساده[1] به صورت

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})$$

ساخته می‌شود. هم‌چنین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &\simeq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1}) = \frac{h}{2}\left(f_0+2\sum_{i=1}^{n-1} f_i+f_n\right)\end{aligned}$$

و از آن‌جا قاعده ذوزنقه مرکب[2] به صورت

$$\int_a^b f(x)dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}\left(f_0+2\sum_{i=1}^{n-1} f_i+f_n\right)$$

به دست می‌آید. به شکل ۲.۵ توجه کنید.

شکل ۲.۵: قاعده ذوزنقه ساده و مرکب

قضیه ۱.۵ **(خطای قاعده ذوزنقه)** *اگر $f\in C^2[x_i,x_{i+1}]$ آن‌گاه*

$$E_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx-\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})=\frac{-h^3}{12}f''(\xi_i),\qquad \xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$$

---

[1] simple Trapezoidal rule

[2] composite Trapezoidal rule

و اگر $f \in C^۲[a,b]$ آن‌گاه

$$E_T(h) = \int_a^b f(x)dx - T(h) = \frac{-nh^۳}{۱۲} f''(\xi) = \frac{-(b-a)h^۲}{۱۲} f''(\xi), \qquad \xi \in [a,b].$$

تذکر ۲.۵ در عمل اگر به ازای هر x در بازه $[a,b]$ داشته باشیم $|f''(x)| \leq M_۲$، آن‌گاه خواهیم داشت

$$|E_T(h)| \leq \frac{(b-a)M_۲}{۱۲} h^۲$$

و این یعنی خطا از مرتبه $O(h^۲)$ است. هم‌چنین با توجه به ظاهر شدن f'' در عبارت خطای قاعده ذوزنقه، می‌توان نتیجه گرفت که این روش برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه یک دقیق است.

مثال ۲.۵ به کمک قاعده ذوزنقه، تقریبی از $\int_۰^۱ x\sin x dx$ به دست آورید که خطای آن حداکثر $۱۰^{-۲}$ باشد.

چون $a = ۰$، $b = ۱$ و $f(x) = x\sin x$ داریم

$$f'(x) = \sin x + x\cos x, \qquad f''(x) = ۲\cos x - x\sin x$$

و در نتیجه

$$|f''(x)| = |۲\cos x - x\sin x| \leq ۲|\cos x| + |x||\sin x| \leq ۲ + ۱ = ۳ = M_۲$$

حال باید داشته باشیم

$$\frac{(b-a)M_۲}{۱۲} h^۲ \leq ۱۰^{-۲}$$

و یا $\frac{(۱-۰)\times ۳}{۱۲} h^۲ \leq ۱۰^{-۲}$ یعنی $h^۲ \leq ۰/۰۴$ و از آن‌جا $h \leq ۰/۲$. با انتخاب $h = ۰/۲$ داریم $n = \frac{b-a}{h} = \frac{۱}{۰/۲} = ۵$ و به ازای $x_۰ = ۰$ و $x_i = x_۰ + ih = \frac{i}{۵}$ خواهیم داشت

$$T(۰/۲) = \frac{۰/۲}{۲}\left(f_۰ + ۲\sum_{i=۱}^{۴} f_i + f_۵\right).$$

در نتیجه

$$T(۰/۲) = \frac{۰/۲}{۲}(۰ + ۲(۰/۲\sin(۰/۲) + ۰/۴\sin(۰/۴) + ۰/۶\sin(۰/۶) + ۰/۸\sin(۰/۸)) + \sin(۱))$$

و یا $T(۰/۲) = ۰/۳۰۵۸$. از طرفی

$$\int_۰^۱ x\sin x dx = (-x\cos x)_۰^۱ + \int_۰^۱ \cos x dx = -\cos ۱ + \sin ۱ = ۰/۳۰۱۲$$

در نتیجه

$$\left|\int_۰^۱ x\sin x dx - T(۰/۲)\right| = |۰/۳۰۱۲ - ۰/۳۰۵۸| = ۰/۰۰۴۶ < ۱۰^{-۲}.$$

اگر قاعده ذوزنقه ساده را به کار ببریم، یعنی با انتخاب ۱ = n یا ۱ = $h = b - a$ خواهیم داشت

$$T(۱) = \frac{۱}{۲}(f_۰ + f_۱) = \frac{۱}{۲}(\sin ۰ + \sin ۱) = ۰/۴۲۰۷.$$

$\triangle$

۲.۲.۵ قاعده سیمسون

چندجمله‌ای درون‌یاب درجه دوم $(m = ۲)$ در نقاط x_i،$x_{i+۱}$ و $x_{i+۲}$ به صورت زیر است

$$p_۲(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta - ۱)}{۲!}\Delta^۲ f_i, \qquad \theta = \frac{x - x_i}{h}.$$

با قرار دادن

$$\int_{x_i}^{x_{i+۲}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+۲}} p_۲(x)dx$$

و اِعمال تغییر متغیر $\theta = \frac{x-x_i}{h}$ داریم

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+۲}} f(x)dx &\simeq \int_۰^۲ (f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_i) h d\theta \\
&= h\left(\theta f_i + \frac{\theta^۲}{۲}\Delta f_i + (\frac{\theta^۳}{۶} - \frac{\theta^۲}{۴})\Delta^۲ f_i\right)_۰^۲ \\
&= h(۲f_i + ۲\Delta f_i + \frac{۱}{۳}\Delta^۲ f_i)
\end{aligned}$$

و با جایگزینی Δf_i و $\Delta^۲ f_i$، قاعده سیمسون ساده[۳] به صورت زیر به دست می‌آید

$$\int_{x_i}^{x_{i+۲}} f(x)dx \simeq \frac{h}{۳}(f_i + ۴f_{i+۱} + f_{i+۲}).$$

حال با فرض زوج بودن n می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_۰}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_۰}^{x_۲} f(x)dx + \int_{x_۲}^{x_۴} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-۲}}^{x_n} f(x)dx \\
&\simeq \tfrac{h}{۳}(f_۰ + ۴f_۱ + f_۲) + \tfrac{h}{۳}(f_۲ + ۴f_۳ + f_۴) + \cdots + \tfrac{h}{۳}(f_{n-۲} + ۴f_{n-۱} + f_n)
\end{aligned}$$

بنابراین قاعده‌ی سیمسون مرکب[۴] به صورت زیر ساخته می‌شود

$$\int_a^b f(x)dx \simeq S(h) = \frac{h}{۳}(f_۰ + ۴(f_۱ + f_۳ + \cdots + f_{n-۱}) + ۲(f_۲ + f_۴ + \cdots + f_{n-۲}) + f_n).$$

---

[۳] simple Simpson's rule

[۴] composite Simpson's rule

قضیه ۲.۵ (خطای قاعده سیمسون) *اگر $f \in C^4[x_i, x_{i+2}]$ آن‌گاه*

$$E_i = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx - \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i), \qquad x_i \le \xi_i \le x_{i+2}$$

و اگر $f \in C^4[a,b]$ آن‌گاه

$$E_S(h) = \int_a^b f(x)dx - S(h) = \frac{-nh^5}{180} f^{(4)}(\xi) = \frac{-(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in [a,b].$$

تذکر ۳.۵ *در عمل اگر به ازای هر x در $[a,b]$ داشته باشیم $|f^{(4)}(x)| \le M_4$، آن‌گاه خواهیم داشت*

$$|E_S(h)| \le \frac{(b-a)M_4}{180} h^4$$

و این یعنی خطای قاعده سیمسون از مرتبه $O(h^4)$ است و با توجه به ظاهر شدن جمله $f^{(4)}$ در عبارت خطای قاعده سیمسون، ملاحظه می‌شود این قاعده برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۳ دقیق است.

مثال ۳.۵ *در قاعده سیمسون، بازه $[0,2]$ را به چند قسمت تقسیم کنیم تا مقدار تقریبی $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ با خطایی کمتر از 10^{-4} به دست آید. ابتدا داریم*

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}, \quad f'''(x) = (12x - 8x^3)e^{-x^2}$$

و $f^{(4)}(x) = (12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2}$. برای یافتن M_4 با متحد صفر قرار دادن

$$f^{(5)}(x) = (-120x + 160x^3 - 32x^5)e^{-x^2}$$

خواهیم داشت $x = 0,\ x \simeq \pm 0/495,\ x \simeq \pm 1/043$ و از آنجا داریم

$$M_4 = \max\{f^{(4)}(0), f^{(4)}(0/495), f^{(4)}(1/043), f^{(4)}(2)\} = 12.$$

بنابراین باید داشته باشیم

$$\frac{(2-0) \times 12}{180} h^4 < 10^{-4}$$

در نتیجه $h < 0/165000$ که نتیجه می‌دهد $n > 12/12000$. پس $n = 14$. $\triangle$

۳.۲.۵ قاعده نقطه میانی

در قاعده‌های ذوزنقه و سیمسون به مقدار $f(a)$ و $f(b)$ نیاز است و بنابراین چنین روش‌هایی برای محاسبه انتگرال‌هایی به شکل $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ یا $\int_0^1 \ln x dx$ مناسب نیستند. راه چاره استفاده از روش‌هایی است که به محاسبه $f(a)$ و $f(b)$ نیاز نداشته باشند. یکی از این روش‌ها قاعده نقطه میانی[5] است که شکل ساده آن به صورت زیر است

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq hf(x_i+\frac{h}{2}).$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i+\frac{h}{2})$$

و در نتیجه قاعده نقطه میانی مرکب[6] به صورت زیر ساخته می‌شود

$$\int_a^b f(x)dx \simeq M(h) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i+\frac{h}{2}).$$

تعبیر هندسی این روش در شکل ۳.۵ نشان داده شده است.

شکل ۳.۵: قاعده نقطه میانی ساده و مرکب

قضیه ۳.۵ **(خطای قاعده نقطه میانی)** *اگر* $f\in C^2[x_i,x_{i+1}]$ *آن‌گاه*

$$E_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - hf(x_i+\frac{h}{2}) = \frac{h^3}{24}f''(\xi_i), \qquad \xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$$

و در نتیجه اگر $f\in C^2[a,b]$ *آن‌گاه*

$$E_M(h) = \int_a^b f(x)dx - M(h) = \frac{nh^3}{24}f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{24}f''(\xi), \qquad \xi\in[a,b].$$

تذکر ۴.۵ *در عمل اگر به ازای هر* x *در* $[a,b]$ *داشته باشیم* $|f''(x)|\le M_2$ *آن‌گاه خواهیم داشت*

$$|E_M(h)| \le \frac{(b-a)M_2}{24}h^2.$$

[5] midpoint rule
[6] composite midpoint rule

به ظاهر مشاهده می‌شود خطای روش نقطه میانی حدود نصف خطای روش ذوزنقه‌ای است ولی این مطلب در کل درست نیست. هم‌چنین این روش برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه یک دقیق است.

مثال ۴.۵ *مقدار تقریبی $\int_۰^۱ \ln x dx$ را به روش نقطه میانی با $n = ۴$ به دست آورده با مقدار واقعی مقایسه کنید.*

$$-۱ = \int_۰^۱ \ln x dx \simeq ۰/۲۵(\ln\frac{۱}{۸} + \ln\frac{۳}{۸} + \ln\frac{۵}{۸} + \ln\frac{۷}{۸}) = -۰/۹۱۵\cdots.$$

$\triangle$

۴.۲.۵ قاعده‌های نیوتن-کاتس

با نگاهی به قاعده‌های انتگرال‌گیری قبلی دیده می‌شود که شکل کلی یک قاعده انتگرال‌گیری یا کوادراتور[۷]، به صورت زیر است

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=۰}^{n} a_i f(x_i) + E$$

که در آن $x_۰, x_۱, \ldots, x_n$ نقاطی در بازه $[a, b]$ و E بیان‌گر خطای روش است. در کوادراتورهای نیوتن-کاتس[۸]، نقاط $x_۰, x_۱, \ldots, x_n$ معلوم و هم‌فاصله فرض می‌شوند و ضرایب $a_۰, a_۱, \ldots, a_n$ به گونه‌ای تعیین می‌شوند که قاعده انتگرال‌گیری دارای درجه دقت (صحت) n باشد، یعنی برای $f(x) = ۱, x, \ldots, x^n$ دقیق باشد ($E = ۰$) و برای تعیین جمله خطا قرار می‌دهیم $f(x) = x^{n+۱}$ و $E \neq ۰$. کوادراتورهای نیوتن-کاتس به دو دسته بسته و باز تقسیم می‌شوند. در نوع بسته از دو مقدار $f(a)$ و $f(b)$ استفاده می‌شود حال آن‌که در نوع باز نیازی به آنها نیست.

مثال ۵.۵ *یک قاعده انتگرال‌گیری به صورت*

$$\int_۰^{۳h} f(x)dx = \sum_{i=۰}^{۳} a_i f(x_i) + E$$

با نقاط $x_۰ = ۰, x_۱ = h, x_۲ = ۲h, x_۳ = ۳h$ در نظر بگیرید. برای تعیین ضرایب $a_۰, \ldots, a_۳$، با قرار دادن $E = ۰$ به ازای $f(x) = ۱, x, x^۲, x^۳$، یک دستگاه خطی به صورت

$$\begin{aligned}
f(x) &= ۱, & \int_۰^{۳h} ۱dx &= a_۰ + a_۱ + a_۲ + a_۳ = ۳h \\
f(x) &= x, & \int_۰^{۳h} xdx &= ha_۱ + ۲ha_۲ + ۳ha_۳ = \tfrac{۹h^۲}{۲} \\
f(x) &= x^۲, & \int_۰^{۳h} x^۲dx &= h^۲a_۱ + ۴h^۲a_۲ + ۹h^۲a_۳ = ۹h^۳ \\
f(x) &= x^۳, & \int_۰^{۳h} x^۳dx &= h^۳a_۱ + ۸h^۳a_۲ + ۲۷h^۳a_۳ = \tfrac{۸۱h^۴}{۴}
\end{aligned}$$

به دست می‌آید که از حل آن خواهیم داشت

$$a_۰ = \frac{۳h}{۸}, \qquad a_۱ = \frac{۹h}{۸}, \qquad a_۲ = \frac{۹h}{۸}, \qquad a_۳ = \frac{۳h}{۸}.$$

---
[۷] quadrature
[۸] Newton-Cotes

بنابراین

$$\int_{\circ}^{3h} f(x)dx \simeq \frac{3h}{8}(f(\circ)+3f(h)+3f(2h)+f(3h)).$$

حال با تغییر متغیر $t = x + x_\circ$ یک قاعده چهار نقطه‌ای به نام قاعده $\frac{3}{8}$ سیمسون به صورت زیر به دست می‌آید

$$\int_{x_\circ}^{x_3} f(t)dt \simeq \frac{3h}{8}(f_\circ + 3f_1 + 3f_2 + f_3).$$

با توجه به تذکر بعد، خطای این قاعده $\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$ است و برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه سه دقیق است. به عنوان تمرین، قاعده مرکب نظیر را به دست آورید. △

تذکر ۵.۵ *در مثال ۵.۵، از روش ضرایب نامعین استفاده کرده و یک قاعده به دست آوردیم. به صورت مشابه می‌توان قاعده‌های نیوتن-کاتس $(m+1)$-نقطه‌ای از نوع بسته را به دست آورد. شکل کلی این قاعده‌ها به صورت زیر است*

$$\int_{x_\circ}^{x_m} f(x)dx = A_\circ h \sum_{i=\circ}^{m} a_i f_i + A_1 h^{l+1} f^{(l)}(\xi), \qquad \xi \in [x_\circ, x_m]$$

که در آن

$$l = \begin{cases} m+1, & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \\ m+2, & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

و برای تعیین سایر مجهولات می‌توان از جدول ۱.۵ کمک گرفت. ضرایب در این جدول متقارن هستند. چون به ازای $m = 8$ به بعد، ضرایب منفی آشکار می‌شوند، جهت پرهیز از عمل تفاضل (دو عدد هم‌علامت نزدیک به هم)، بهتر است از mهای کوچک استفاده کرد.

m	$A_\circ$	$a_\circ$	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1
۱	$\frac{1}{2}$	۱	۱				$\frac{-1}{12}$
۲	$\frac{1}{3}$	۱	۴	۱			$\frac{-1}{90}$
۳	$\frac{3}{8}$	۱	۳	۳	۱		$\frac{-3}{80}$
۴	$\frac{4}{45}$	۷	۳۲	۱۲	۳۲	۷	$\frac{-8}{945}$
۵	$\frac{5}{288}$	۱۹	۷۵	۵۰	۵۰	۷۵	$\frac{-275}{12096}$
۶	$\frac{1}{140}$	۴۱	۲۱۶	۲۷	۲۷۲	۲۷	$\frac{-9}{1400}$
۷	$\frac{7}{17280}$	۷۵۱	۳۵۷۷	۱۳۲۳	۲۹۸۹	۲۹۸۹	$\frac{-8183}{518400}$
۸	$\frac{4}{14175}$	۹۸۹	۵۸۸۸	−۹۲۸	۱۰۹۴۸	−۴۵۴۰	$\frac{-2368}{467775}$

جدول ۱.۵: قاعده‌های نیوتن-کاتس

تذکر ۶.۵ *افراز منظم $a = t_\circ < t_1 < \cdots < t_n = b$ از بازه $[a, b]$ را در نظر بگیرید به طوری که*

$$t_i = t_\circ + ih, \quad i = \circ, 1, \ldots, n$$

که در آن $h = \frac{b-a}{n}$. سپس تعریف کنید $x_1 = t_0 + h/2$ و $x_i = x_1 + (i-1)h,\ i = 1, \dots, n$. قاعده‌های نیوتن_کاتس باز با استفاده از نقاط $x_1, \dots, x_n$ ساخته می‌شوند. به عنوان مثال قاعده نقطه میانی یک کوادراتور نیوتن_کاتس دو نقطه‌ای از نوع باز است.

۵.۲.۵ کوادراتور گاوس

در این روش یک کوادراتور به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) + E$$

که در آن نه تنها ضرایب بلکه نقاط نیز مجهول فرض می‌شوند، بنابراین $2n+2$ مجهول داریم و $2n+2$ معادله به این صورت ساخته می‌شوند که فرض می‌شود درجه دقت (صحت) کوادراتور $2n+1$ باشد، یعنی برای چندجمله‌ای‌های تا درجه $2n+1$ دقیق باشد به عبارت دیگر برای $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$ قرار می‌دهیم $E = 0$ و برای تعیین E قرار می‌دهیم $f(x) = x^{2n+2}$.

مثال ۶.۵ *برای به دست آوردن کوادراتور دو نقطه‌ای گاوس با فرض*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + E$$

و با قرار دادن $E = 0$ به ازای $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ خواهیم داشت

$$\begin{cases} 2 = \int_{-1}^{1} dx = \omega_0 + \omega_1 \\ 0 = \int_{-1}^{1} x dx = \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 \\ \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 \\ 0 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 \end{cases}$$

و بنابراین با حل این دستگاه غیرخطی (که چندان هم راحت نیست) داریم

$$\omega_0 = \omega_1 = 1 \qquad x_1 = -x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

در نتیجه

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(\frac{-\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) + E.$$

برای یافتن E به ازای $f(x) = x^4$ قرار می‌دهیم $E = \tilde{E}$ و خواهیم داشت

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = (\frac{-\sqrt{3}}{3})^4 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^4 + \tilde{E}$$

و از آن‌جا $\tilde{E} = \frac{8}{45}$. در نتیجه

$$E = \tilde{E} \times \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{135}, \qquad \xi \in [-1, 1].$$

پس کوادراتور دو نقطه‌ای گاوس به صورت زیر به دست می‌آید

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(\frac{-\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{135}$$

البته به شرط آن که $f \in C^4[-1, 1]$. △

در حالت کلی برای تعیین کوادراتورهای گاوس، باید یک دستگاه $2n + 2$ معادله غیرخطی حل شود که کار چندان ساده‌ای نیست. در عمل از قضیه زیر کمک می‌گیریم.

قضیه ۴.۵ (**کوادراتور گاوس-لژاندر**) *کوادراتور n نقطه‌ای گاوس-لژاندر در بازه $[-1, 1]$ به صورت زیر است*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i f(x_i) + E_n$$

که در آن $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ ریشه‌های p_n یعنی چندجمله‌ای درجه n لژاندر هستند و ضرایب (وزن‌ها) از رابطه

$$\omega_i = \frac{2(1 - {x_i}^2)}{n^2 (p_{n-1}(x_i))^2}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

به دست می‌آیند و هم‌چنین

$$E_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi), \qquad \xi \in [-1, 1].$$

مثال ۷.۵ *کوادراتور سه نقطه‌ای گاوس-لژاندر را به دست آورید.*
می‌دانیم چندجمله‌ای‌های لژاندر به کمک رابطه بازگشتی

$$p_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x p_n(x) - \frac{n}{n+1} p_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

با دو جمله $p_0(x) = 1$ و $p_1(x) = x$ ساخته می‌شوند و یا می‌توان از رابطه زیر کمک گرفت

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right).$$

در اینجا $n = 3$ و داریم

$$p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \qquad p_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

از حل $p_3(x) = 0$ خواهیم داشت

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

بنابراین

$$\omega_0 = \frac{2(1-x_0^2)}{9(p_2(x_0))^2} = \frac{5}{9} = \omega_2, \qquad \omega_1 = \frac{2(1-x_1^2)}{9(p_2(x_1))^2} = \frac{8}{9}$$

و هم‌چنین

$$E_3 = \frac{2^7 \times (3!)^4}{7 \times (6!)^3} f^{(6)}(\xi) = \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi), \qquad \xi \in [-1,1].$$

در نتیجه

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{9}\left(5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})\right) + \frac{f^{(6)}(\xi)}{15750}.$$

این قاعده برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۵ دقیق است. به عنوان مثال اگر $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ آن‌گاه

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} \simeq \frac{1}{9}\left(\frac{5}{1+\frac{3}{5}} + \frac{8}{1+0} + \frac{5}{1+\frac{3}{5}}\right) = \frac{19}{12} = 1/58\bar{3}$$

از طرف دیگر

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 1/57079.$$

$\triangle$

کوادراتورهای گاوس-لژاندر را مانند کوادراتورهای نیوتن-کاتس یک بار برای همیشه به دست آورده و در این راستا به نکات زیر توجه داریم

- اگر n زوج باشد

$$\begin{cases} x_{n-i} = -x_i \\ & i = 0, 1, \ldots, \frac{n-2}{2} \\ \omega_{n-i} = \omega_i \end{cases}$$

و اگر n فرد باشد

$$\begin{cases} x_{n-i} = -x_i \\ x_{\frac{n-1}{2}} = 0 & i = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2} - 1 \\ \omega_{n-i} = \omega_i \end{cases}$$

- ω_i ها همه مثبت هستند و $0 < \omega_i \leq 1$ (اگر $f(x_i)$ دارای خطا باشد ضریب آن کوچک است)

- با تغییر متغیر $x = \frac{1}{2}((b-a)t + (b+a))$ ($dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$) خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(\frac{1}{2}((b-a)t + (b+a)))dt.$$

مثال ۸.۵ *از میان قاعده‌های انتگرال‌گیری دو و سه نقطه‌ای گاوس و سیمسون با $h = ۰/۱, ۰/۰۱$، کدام یک تقریب بهتری برای انتگرال $I = \int_۰^۴ x^۵ dx$ نتیجه می‌دهد؟ می‌دانیم در عبارت خطای روش‌های دو نقطه‌ای گاوس، سیمسون و سه نقطه‌ای گاوس به ترتیب $f^{(۴)}$، $h^۴ f^{(۴)}$ و $f^{(۶)}$ ظاهر می‌شود و با توجه به تابع $f(x) = x^۵$، انتظار می‌رود به ترتیب قاعده سه نقطه‌ای گاوس، روش سیمسون با $h = ۰/۰۱$، روش سیمسون با $h = ۰/۱$ و قاعده دو نقطه‌ای گاوس تقریب‌های بهتری تولید کنند. البته بدون تردید قاعده سه نقطه‌ای گاوس جواب دقیق را به دست می‌دهد و داریم*

$$I = ۲\int_{-۱}^{۱}(۲t+۲)^۵ dt = \frac{۲}{۹}\left(۵(-۲\sqrt{\frac{۳}{۵}}+۲)^۵ + ۸(۲\times ۰+۲)^۵ + ۵(۲\sqrt{\frac{۳}{۵}}+۲)^۵\right) = \frac{۴^۶}{۶} = ۶۸۲/۶۶۰\ldots.$$

$\triangle$

مثال ۹.۵ *ضرایب ω_i در قاعده زیر را به گونه‌ای به دست آورید که این قاعده دارای درجه دقت ۲ باشد.*

$$\int_۰^h f(\sqrt{x})dx \simeq \omega_۱ f(۰) + \omega_۲ f'(۰) + \omega_۳ f(h)$$

به ازای $f(x) = ۱, x, x^۲$ خواهیم داشت

$$h = \int_۰^h dx = \omega_۱ + ۰ + \omega_۳$$
$$\frac{۲}{۳}h^{\frac{۳}{۲}} = \int_۰^h \sqrt{x}dx = ۰ + \omega_۲ + h\omega_۳$$
$$\frac{h^۲}{۲} = \int_۰^h x dx = ۰ + ۰ + h^۲\omega_۳$$

و از حل آن داریم

$$\omega_۱ = h - \frac{۱}{۲}, \qquad \omega_۲ = \frac{۲}{۳}h^{\frac{۳}{۲}} - \frac{h}{۲}, \qquad \omega_۳ = \frac{۱}{۲}.$$

$\triangle$

۶.۲.۵ روش رامبرگ

روش رامبرگ از قاعده انتگرال‌گیری ذوزنقه (سیمسون) استفاده کرده و به کمک برون‌یابی ریچاردسون تقریب‌های بهتری به دست می‌آورد. ثابت می‌شود برای توابع به اندازه کافی مشتق‌پذیر داریم

$$\int_a^b f(x)dx = T(h) + a_۲h^۲ + a_۴h^۴ + a_۶h^۶ + \cdots$$

که در آن h اندازه گام نقاط هم فاصله، $T(h)$ قاعده ذوزنقه مرکب و $a_۲$، $a_۴$، … ضرایبی ثابت و مستقل از h هستند. با تبدیل h به $\frac{h}{۲}$ در این رابطه و حذف $a_۲$ خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{۴T(\frac{h}{۲}) - T(h)}{۳} - \frac{a_۴}{۴}h^۴ - \frac{۵a_۶}{۱۶}h^۶ - \cdots$$

و این یعنی $\frac{4T(\frac{h}{2})-T(h)}{3}$ تقریبی برای مقدار انتگرال با خطای $O(h^4)$ است، در حالی که $T(h)$ تقریبی با خطای $O(h^2)$ است. برای ساختن یک روند تکراری، به ازای $i=0,1,2,\ldots$ قرار می‌دهیم

$$h_i=\frac{b-a}{2^i},\quad x_j=a+jh_i,\ j=0,1,\ldots,2^i,\quad T_{0i}=T(h_i)=\frac{h_i}{2}\left(f(a)+2\sum_{j=1}^{2^i-1}f(x_j)+f(b)\right)$$

و برای $p=1,2,\ldots$ قرار می‌دهیم

$$T_{pi}=\frac{4^pT_{(p-1)(i+1)}-T_{(p-1)i}}{4^p-1}$$

در عمل جدولی به صورت زیر تهیه کرده و روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که برای نمونه شرط توقف $|T_{p0}-T_{(p-1)0}|<\varepsilon$ برقرار شود.

T_{00}				
T_{01}	T_{10}			
T_{02}	T_{11}	T_{20}		
T_{03}	T_{12}	T_{21}	T_{30}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

تذکر ۷.۵ *خطای T_{pi} از مرتبه $O(h^{2p+2})$ است و برای چندجمله‌ای‌های تا درجه $2p+1$ دقیق است و به علاوه ثابت می‌شود*

$$\lim_{p\longrightarrow\infty}T_{p0}=\int_a^b f(x)dx.$$

تذکر ۸.۵ *بعضی از قاعده‌های نیوتن_کاتس در حین محاسبه جملات قاعده رامبرگ به دست می‌آیند، به عنوان مثال می‌دانیم*

$$T(h)=\tfrac{h}{2}(f(a)+f(b))$$

$$T(\tfrac{h}{2})=\tfrac{h}{4}\left(f(a)+2f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)\right)$$

و در نتیجه

$$\frac{4T(\frac{h}{2})-T(h)}{3}=\frac{h}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right)=S(\frac{h}{2}).$$

مثال ۱۰.۵ *مقدار تقریبی $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx$ را با روش رامبرگ و با دقت $4D$ به دست آورید.*

h	T_{0i}	T_{1i}	T_{2i}	T_{3i}
$\frac{\pi}{4}$	۰/۹۴۸۰۶			
$\frac{\pi}{8}$	۰/۸۹۹۰۸	۰/۸۸۲۷۶		
$\frac{\pi}{16}$	۰/۸۸۵۸۹	۰/۸۸۱۴۹	۰/۸۸۱۴۰	
$\frac{\pi}{32}$	۰/۸۸۲۵۱	۰/۸۸۱۳۸	۰/۸۸۱۳۷	۰/۸۸۱۳۷
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

داریم

$$|T_{۳۰} - T_{۲۰}| = |۰/۸۸۱۳۷ - ۰/۸۸۱۴۰| = ۰/۳ \times ۱۰^{-۴} < ۰/۵ \times ۱۰^{-۴}$$

و با مقایسه با مقدار واقعی

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \sec x dx = (\ln(\sec x + \tan x))_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = \ln(\sqrt{۲} + ۱) = ۰/۸۸۱۳۷۳۵۸۷$$

در می‌یابیم

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \sec x dx - ۰/۸۸۱۳۷ < ۰/۴ \times ۱۰^{-۵}.$$

$\triangle$

تمرین

۱. از تابع $y = f(x)$ در بازه $[۰, ۱]$، داده‌های جدول زیر در دسترس است.

x	۰	۰/۲۵	۰/۳۷۵	۰/۵	۰/۶۲۵	۰/۷۵	۱
$f(x)$	۰	۰/۱۳۵۰۶	۰/۱۶۰۶۱	۰/۱۶۸۸۷	۰/۱۶۵۵۲	۰/۱۵۴۹۰	۰/۱۲۳۸۵

تقریب‌هایی برای $f'(۰)$، $f'(۰/۵)$ و $f'(۱)$ و همچنین $f''(۰)$، $f''(۰/۵)$ و $f''(۱)$ به چند روش حساب کنید.

۲. به کمک روش بسط تیلور، رابطه پنج نقطه‌ای پیشرو یعنی

$$f'(x) = \frac{۱}{۱۲h}(-۲۵f(x) + ۴۸f(x+h) - ۳۶f(x+۲h) + ۱۶f(x+۳h) - ۳f(x+۴h)) + \frac{h^۴}{۵}f^{(۵)}(\xi)$$

را استخراج کنید که در آن $x \le \xi \le x + ۴h$. سپس با تبدیل h به $-h$ شکل پسروی آن را نیز به دست آورید.

۳. با استفاده از بسط تیلور $f(x_i + h)$ و $f(x_i + \frac{h}{۲})$ نشان دهید $\frac{\Delta f_i}{h}$ برای تقریب $f'_{i+\frac{۱}{۲}}$ دقیق‌تر است تا برای تقریب f'_i، به عبارت دیگر داریم

$$f'_i = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h), \qquad f'_{i+\frac{۱}{۲}} = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h^۲).$$

۴. قاعده مشتق‌گیری زیر برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه چند دقیق است؟

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h/۲) - f(x-h/۲)}{h}$$

۵. به کمک قاعده سیمسون، تقریبی از $\int_۰^۱ x \sin x dx$ به دست آورید که خطای آن حداکثر $۱۰^{-۵}$ باشد.

۶. مقدار $\int_۰^{۰/۹} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را به کمک روش نقطه میانی چنان به دست آورید که خطای آن حداکثر $۱۰^{-۲}$ باشد.

۷. مقدار $\int_{۰}^{۱}(x^{۳}+۱)dx$ را به کمک روش دو نقطه‌ای گاوس و روش ذوزنقه با طول گام $h=۰/۲$ تقریب بزنید. جواب کدام یک از دو روش قسمت قبل دقیق‌تر است؟ (برای ادعای خود بدون محاسبه مقدار دقیق انتگرال دلیل بیاورید).

۸. مقدار $\int_{۱}^{۲}\ln x\,dx$ را به کمک روش دو نقطه‌ای گاوس و روش سیمپسون با $h=۰/۲۵$ تقریب بزنید. سپس کرانی برای خطای روش سیمپسون به دست آورید. اگر در قسمت قبل طول گام را در روش سیمپسون $h=۰/۱۲۵$ بگیریم، بدون محاسبه مقدار تقریبی و فقط به کمک فرمول خطا توضیح دهید که خطا چه تغییری می‌کند؟

۹. فرض کنید h یک عدد حقیقی معلوم باشد. ضرایب مجهول $w_۱$، $w_۲$، $w_۳$ و $w_۴$ را چنان بیابید که فرمول

$$\int_{۰}^{h} f(x)dx = w_۱ f(۰) + w_۲ f(h) + w_۳ f(h/۲) + w_۴ f'(h/۲)$$

برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق باشد.

۱۰. حداقل تعداد تقسیمات n را چنان بیابید که خطای محاسبه $\int_{۱}^{۲} e^{-x^{۲}}\,dx$ به روش ذوزنقه کمتر از $۱۰^{-۴}$ باشد.

۱۱. حداقل تعداد تقسیمات n را چنان بیابید که خطای محاسبه $\int_{۰}^{۱}\sin(۱/۲x)dx$ به کمک روش‌های ذوزنقه و سیمپسون کمتر از $۱۰^{-۴}$ باشد. با n به دست آمده از قسمت قبل مقدار تقریبی انتگرال را با هر دو روش (محاسبات با دقت $۴D$) محاسبه و با مقدار واقعی مقایسه کنید.

۱۲. فرض کنید h یک عدد حقیقی معلوم باشد. ضرایب مجهول $w_۰$، $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ را چنان بیابید که فرمول

$$\frac{۱}{۳h}\int_{۰}^{۳h} f(x)dx = w_۰ f(۰) + w_۱ f(h) + w_۲ f(۲h) + w_۳ f(۳h)$$

برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق باشد.

۱۳. فرمول تقریبی $f'''(x_i) \simeq \frac{f_{i+۲} - ۲f_{i+۱} + ۲f_{i-۱} - f_{i-۲}}{۲h^{۳}}$ برای چندجمله‌ای‌های حداکثر تا درجه چند دقیق است؟ چرا؟

۱۴. الف) انتگرال $\int_{۰}^{۱} f(x)dx$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $T(۱) = ۰/۷۵۰۰۰$، $T(\frac{۱}{۲}) = ۰/۸۱۹۴۴$، $T(\frac{۱}{۴}) = ۰/۸۳۱۷۰$. با استفاده از قاعده انتگرال‌گیری رامبرگ تقریبی از $\int_{۰}^{۱} f(x)dx$ با دقت $O(h^{۶})$ بیابید.

ب) مقدار تقریبی انتگرال $\int_{۰}^{۰/۴} \frac{\cos x}{۱+x^{۲}}dx$ را به کمک روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

۱۵. ضرایب $a_۰, a_۱, a_۲$ را چنان بیابید که فرمول تقریبی $f'(x_i) \simeq a_۰ f(x_i - h) + a_۱ f(x_i) + a_۲ f(x_i + h)$ برای چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر ۲ دقیق باشد.

۱۶. الف) بازه $[۱,۲]$ را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم تا مقدار انتگرال $I = \int_{۱}^{۲}\ln\frac{x^{۲}}{۲}dx$ به کمک روش ذوزنقه با خطایی کمتر از $۱۰^{-۲}$ به دست آید؟

ب) با استفاده از قاعده گاوسی مناسبی که برای چندجمله‌ای‌های از درجه ۴ دقیق باشد، تقریبی از انتگرال داده شده بیابید.