فصل ۶

دستگاه معادلات خطی

در این فصل قصد داریم از دستگاه معادلات هم‌زمان

$$\begin{cases} E_1 & : & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ E_2 & : & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ E_n & : & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

که در آن b_iها و a_{ij}ها معلوم هستند، $x_1,\ldots,x_n$ را به دست آوریم. چنین دسته معادلات را یک دستگاه n معادله n مجهولی خطی نامند. با معرفی بردارهای x و b و ماتریس A به صورت

$$x = [x_i]_{n\times 1}, \qquad b = [b_i]_{n\times 1}, \qquad A = [a_{ij}]_{n\times n}$$

و یا

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

می‌توان این دستگاه معادلات را به شکل فشرده $Ax = b$ نوشت.

تذکر ۱.۶ *حل این مسئله معادل با یافتن A^{-1} است، به این معنی که اگر A^{-1} موجود باشد $x = A^{-1}b$ جواب مسئله بیان‌شده است و برعکس اگر solve فرآیندی باشد که A و b را به عنوان ورودی گرفته و x را به عنوان خروجی بدهد یعنی $x = \mathrm{solve}(A,b)$ آن‌گاه برای $i = 1,\ldots,n$ قرار می‌دهیم $\hat{A}_i = \mathrm{solve}(A,e_i)$ و سپس تعریف می‌کنیم $\hat{A} = [\hat{A}_1\ \hat{A}_2\ \cdots\ \hat{A}_n]$ و خواهیم داشت*

$$A\hat{A} = A[\hat{A}_1\ \hat{A}_2\ \cdots\ \hat{A}_n] = [A\hat{A}_1\ A\hat{A}_2\ \cdots\ A\hat{A}_n] = [e_1\ e_2\ \cdots\ e_n] = I$$

یعنی $\hat{A} = A^{-1}$. چون محاسبه A^{-1} با روش‌های سنتی (کلاسیک) حجم عملیات بالایی دارد، روش‌هایی مطلوب هستند که x را بدون محاسبه A^{-1} به دست آورند.

روش‌های حل مسئله بیان‌شده به دو دسته روش‌های مستقیم[۱] و روش‌های تکراری[۲] دسته‌بندی می‌شوند که در ادامه به بررسی آنها می‌پردازیم.

۱.۶ روش‌های مستقیم

روش‌های مستقیم به روش‌هایی گفته می‌شود که در تعدادی متناهی (از قبل مشخص) تکرار خاتمه می‌یابند و اگر خطای گرد کردن وجود نداشته باشد، جواب دقیق دستگاه را به دست می‌آورند. روش‌های مستقیمی که از نظر عددی پایدار باشند از اهمیت بالایی برخوردار هستند و وجه تمایز آن‌ها در تعداد اعمال (حجم عملیات)[۳] است.

۱.۱.۶ روش حذف گاوسی

قبل از آن که به معرفی این روش بپردازیم، توجه داریم که اگر $A = [a_{ij}]_{n\times n}$، ماتریسی پایین مثلثی باشد یعنی داشته باشیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & & \bigcirc \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n۱} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

آن‌گاه از $Ax = b$ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} E_۱ : a_{۱۱}x_۱ & = b_۱ \\ E_۲ : a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ & = b_۲ \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & \vdots \\ E_n : a_{n۱}x_۱ + a_{n۲}x_۲ + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

و از آن‌جا به کمک جای‌گذاری پیشرو (از اول)[۴] خواهیم داشت

$$\begin{cases} x_۱ = \frac{b_۱}{a_{۱۱}} \\ x_i = \frac{۱}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=۱}^{i-۱} a_{ij}x_j\right), \qquad i = ۲, \ldots, n \end{cases}$$

---

[۱] direct methods
[۲] iterative methods
[۳] operations count
[۴] forward substitution

و اگر A ماتریسی بالامثلثی باشد یعنی داشته باشیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

آن‌گاه از $Ax = b$ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} E_1 : & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 : & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ E_n : & a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

و از آن‌جا به کمک جای‌گذاری پسرو (از آخر)[5] خواهیم داشت

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right), \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \end{cases}$$

به وضوح شرط لازم و کافی برای وجود جواب در این حالت آن است که درایه‌های قطری A مخالف صفر باشند. اما ایده روش حذف گاوسی[6] آن است که به کمک اَعمال سطری مقدماتی[7] دستگاه $Ax = b$ را به دستگاه $Rx = c$ تبدیل کنیم که دو دستگاه هم‌ارز باشند (جواب یکسانی داشته باشند) و R یک ماتریس مثلثی باشد. واضح است که اگر R ماتریسی پایین/بالامثلثی باشد با جای‌گذاری پیشرو/پسرو به جواب می‌رسیم.

قرارداد : *ماتریس افزوده[8] متناظر با دستگاه $Ax = b$، ماتریسی است به صورت زیر*

$$S = [A\ b] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

که در آن برای $i = 1, \ldots, n$ داریم $a_{i,n+1} = b_i$ و منظور از R_i سطر iاُم ماتریس S است.

تعریف ۱.۶ *عملیات زیر به اَعمال سطری مقدماتی معروف هستند.*

- *ضرب یک سطر در عددی مخالف صفر* $(R_i \leftarrow \lambda R_i)$

---

[5] backward substitution
[6] Gaussian elimination method
[7] elementary row operations
[8] augmented matrix

- *تعویض دو سطر با هم* $(R_i \leftrightarrow R_j)$
- *افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر* $(R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j)$

تذکر ۲.۶ *انجام این اَعمال روی سطرهای ماتریس S متناظر با اِعمال آن روی معادلات دستگاه $Ax = b$ است. با اِعمال تعداد متناهی اَعمال سطری مقدماتی، ماتریس S به ماتریس $\tilde{S}$ تبدیل می‌شود که هم‌ارز هستند (دستگاه معادلات نظیر آن‌ها جواب یکسان دارند).*

حال می‌توان روش حذف گاوسی را در الگوریتم زیر خلاصه کرد.

الگوریتم روش حذف گاوسی

- **ورودی.** ماتریس افروده‌ی $S = [A\ b]_{n\times n+1}$
- **خروجی.** ماتریس افروده‌ی $S = [U\ c]_{n\times n+1}$ که در آن U ماتریسی بالا مثلثی است

۱) قرار دهید $j = 1$

۲) rای $(j \le r \le n)$ پیدا کنید که $a_{rj} \neq 0$. اگر چنین rای یافت نشد متوقف شوید مسئله جواب یکتا ندارد

۳) اگر $r \neq j$ آن‌گاه انجام دهید $R_r \leftrightarrow R_j$

۴) برای $i = j+1, \dots, n$ قرار دهید $l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ و انجام دهید $R_i \leftarrow R_i - l_{ij} R_j$

۵) قرار دهید $j = j + 1$ و اگر $j < n$ به گام ۲ بروید

تعریف ۲.۶ *در این الگوریتم، گام ۲ به محورگیری[9] و عنصر a_{rj} به عنصر محوری[10] معروف است.*

تذکر ۳.۶ *چون در هر تکرار از روش حذف گاوسی اَعمال سطری مقدماتی انجام می‌شود بنابراین داریم*

$$\det A = \det A^{(1)} = (-1)^{m_2} \det A^{(2)} = (-1)^{m_2}(-1)^{m_3} \det A^{(3)} = \cdots$$
$$= (-1)^{m_2} \cdots (-1)^{m_n} \det A^{(n)}$$

که در آن برای $j = 2, \dots, n$ خواهیم داشت

$$m_j = \begin{cases} 1, & \text{اگر در گام ۳ تکرار } (j-1)\text{ام جابجایی سطر داشته باشیم} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به ویژه

$$\det A = (-1)^{m_2} \cdots (-1)^{m_n} \det A^{(n)} = (-1)^{m_2} \cdots (-1)^{m_n} \det U =$$
$$(-1)^{m_2} \cdots (-1)^{m_n} u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}.$$

---

[9] pivoting

[10] pivot element

مثال ۱.۶ *دستگاه داده‌شده را با روش حذف گاوسی و جای‌گذاری پسرو حل کنید.*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \quad\;\; x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

ماتریس افزوده عبارت است از

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

و برای $j=1$ داریم $r=1$ زیرا $a_{11}=1\neq 0$. بنابراین

$$l_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{1}{1}=1, \qquad R_2\leftarrow R_2-R_1$$
$$l_{41}=\frac{a_{41}}{a_{11}}=\frac{1}{1}=1, \qquad R_4\leftarrow R_4-R_1$$

پس داریم

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

و برای $j=2$ داریم $r=3$ زیرا $a_{32}=1\neq 0=a_{22}$ بنابراین با انجام $R_3\leftrightarrow R_2$ داریم

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

و $l_{42}=\frac{a_{42}}{a_{22}}=\frac{-2}{1}=-2$ و با انجام $R_4\leftarrow R_4+2R_2$ خواهیم داشت

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

در آخر برای $j=3$ داریم $r=3$ زیرا $a_{33}=2\neq 0$. حال $l_{43}=\frac{a_{43}}{a_{33}}=\frac{2}{2}=1$ و با انجام عمل $R_4\leftarrow R_4-R_3$ داریم

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

به کمک جای‌گذاری پسرو داریم

$$\begin{cases} x_4=\frac{-4}{-2}=2 \\ x_3=\frac{1}{2}(0+2x_4)=2 \\ x_2=\frac{1}{1}(-1-x_3+x_4)=-1 \\ x_1=\frac{1}{1}(1-x_2+x_3-x_4)=2 \end{cases}$$

$\triangle$

تذکر ۴.۶ *با شمارش اعمال ممیز شناور، ثابت می‌شود حجم عملیات الگوریتم حذف گاوسی و جای‌گذاری پسرو/پیشرو به ترتیب از مرتبه $O(n^3)$ و $O(n^2)$ است (n بعد ماتریس A است).*

با توجه به مثال‌هایی که در ادامه خواهند آمد، باید روش حذف گاوسی با جای‌گذاری پسرو با حساب ممیز شناور را با احتیاط کامل به کار برد.

مثال ۲.۶ *با این فرض که ماشین حسابی با دقت $3S$ در اختیار است، می‌خواهیم به کمک روش حذف گاوسی با جای‌گذاری پسرو جواب دستگاه داده‌شده را به دست آوریم.*

$$\begin{cases} E_1 : & 0{,}000100x_1 & + & 1{,}00x_2 & = & 1{,}00 \\ E_2 : & 1{,}00x_1 & + & 1{,}00x_2 & = & 2{,}00 \end{cases}$$

با عمل سطری مقدماتی $E_2\leftarrow E_2-\frac{1{,}00}{0{,}000100}E_1$ خواهیم داشت

$$\begin{cases} E_1 : & 0{,}000100x_1 & + & 1{,}00x_2 & = & 1{,}00 \\ E_2 : & & & -10000x_2 & = & -10000 \end{cases}$$

و به کمک جای‌گذاری پسرو داریم

$$\begin{cases} x_2\simeq 1{,}00 \\ x_1\simeq \frac{1{,}00-1{,}00\times 1{,}00}{0{,}000100}=0{,}00 \end{cases}$$

که با مقایسه با جواب واقعی دستگاه با دقت $4D$ یعنی $x_1=1{,}0001$ و $x_2=0{,}9999$، متوجه می‌شویم درصد خطای نسبی x_1 زیاد است. علت آن است که در محاسبه x_2 خطایی به اندازه $0{,}0001$ مرتکب شده‌ایم و در محاسبه

$x_۱$ این عدد در ضریب $۱۰۰۰۰ = \frac{۱/۰۰}{۰/۰۰۰۱۰۰}$ ضرب می‌شود (تقسیم به عدد کوچک) و باعث می‌شود خطایی نزدیک به ۱ واحد در محاسبه $x_۱$ تولید شود. اما چاره کار آن است که از محورگیری جزیی[۱۱] استفاده کنیم. در این نوع محورگیری باید گام ۲ الگوریتم روش حذف گاوسی به صورت زیر تغییر یابد.

۲) r ای $(j \le r \le n)$ پیدا کنید که $|a_{rj}| = \max\limits_{j \le k \le n} |a_{kj}|$. اگر $a_{rj} = ۰$ متوقف شوید مسئله جواب یکتا ندارد

پس در این مثال برای $j = ۱$ خواهیم داشت $r = ۲$ و با انجام $R_۱ \leftrightarrow R_۲$ داریم

$$\begin{cases} E_۱ : & ۱/۰۰x_۱ + ۱/۰۰x_۲ = ۲/۰۰ \\ E_۲ : & ۰/۰۰۰۱۰۰x_۱ + ۱/۰۰x_۲ = ۱/۰۰ \end{cases}$$

سپس به کمک عمل سطری مقدماتی $E_۲ \leftarrow E_۲ - \frac{۰/۰۰۰۱۰۰}{۱/۰۰}E_۱$ خواهیم داشت

$$\begin{cases} E_۱ : & ۱/۰۰x_۱ + ۱/۰۰x_۲ = ۲/۰۰ \\ E_۲ : & ۱/۰۰x_۲ = ۱/۰۰ \end{cases}$$

با جای‌گذاری پسرو به دست می‌آوریم $x_۱ \simeq ۱/۰۰$ و $x_۲ \simeq ۱/۰۰$. $\triangle$

مثال‌هایی وجود دارند که نشان می‌دهند محورگیری جزیی مشکل ناپایداری روش حذف گاوسی را برطرف نمی‌کند و باید از سایر روش‌ها مانند محورگیری جزیی مقیاس‌شده (محورگیری جزیی وزنی)[۱۲] استفاده کرد. اما چون در عمل بیشتر مواقع مشکل ناپایداری روش حذف گاوسی با همان محورگیری جزیی برطرف می‌شود می‌توان روش حذف گاوسی با محورگیری جزیی را یک روش پایدار دانست.

۲.۱.۶ روش حذفی گاوس-جردن

قبل از آن که به معرفی این روش بپردازیم، توجه داریم که اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ماتریسی قطری باشد یعنی داشته باشیم

$$A = \mathrm{diag}[a_{۱۱}, \ldots, a_{nn}] = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

[۱۱] partial pivoting
[۱۲] scaled partial pivoting

آن‌گاه از $Ax = b$ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} E_1 : & a_{11}x_1 & & & = b_1 \\ E_2 : & & a_{22}x_2 & & = b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ E_n : & & & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

و از آن‌جا خواهیم داشت

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

به وضوح شرط لازم و کافی برای وجود جواب در این حالت آن است که درایه‌های قطری A مخالف صفر باشند. اما ایده روش حذفی گاوس-جردن[13] آن است که به کمک اَعمال سطری مقدماتی دستگاه $Ax = b$ را به دستگاه $Dx = c$ تبدیل کنیم که دو دستگاه هم‌ارز باشند (جواب یکسانی داشته باشند) و D یک ماتریس قطری باشد. مراحل این روش در الگوریتم زیر خلاصه شده است.

الگوریتم روش حذفی گاوس-جردن

- **ورودی.** ماتریس افروده $S = [A\ b]_{n\times n+1}$
- **خروجی.** ماتریس افروده $S = [D\ c]_{n\times n+1}$ که در آن D ماتریسی قطری است

۱) قرار دهید $j = 1$

۲) rای $(j \le r \le n)$ پیدا کنید که $a_{rj} \neq 0$. اگر چنین rای یافت نشد متوقف شوید مسئله جواب یکتا ندارد

۳) اگر $r \neq j$ آن‌گاه انجام دهید $R_r \leftrightarrow R_j$

۴) برای $i = j+1, \dots, n$ قرار دهید $l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ و انجام دهید $R_i \leftarrow R_i - l_{ij}R_j$

۵) قرار دهید $j = j + 1$ و اگر $j < n$ به گام ۲ بروید

۶) اگر $a_{jj} = 0$ متوقف شوید مسئله جواب یکتا ندارد

۷) برای $i = 1, \dots, j-1$ قرار دهید $l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ و انجام دهید $R_i \leftarrow R_i - l_{ij}R_j$

۸) قرار دهید $j = j - 1$ و اگر $j > 1$ به گام ۶ بروید

مثال ۳.۶ *دستگاه داده‌شده را با روش حذفی گاوس-جردن حل کنید.*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

---
[13] Gauss-Jordan elimination method

ماتریس افزوده عبارت است از

$$S=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

و برای $j=۱$ *داریم* $r=۱$ *زیرا* $a_{۱۱}=۱\neq ۰$*. بنابراین*

$$l_{۲۱}=\frac{a_{۲۱}}{a_{۱۱}}=\frac{۱}{۱}=۱,\qquad R_۲\leftarrow R_۲-R_۱$$
$$l_{۳۱}=\frac{a_{۳۱}}{a_{۱۱}}=\frac{۰}{۱}=۰,\qquad R_۳\leftarrow R_۳$$
$$l_{۴۱}=\frac{a_{۴۱}}{a_{۱۱}}=\frac{۱}{۱}=۱,\qquad R_۴\leftarrow R_۴-R_۱$$

پس داریم

$$S=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & -۲ & ۰ & -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

و برای $j=۲$ *داریم* $r=۳$ *زیرا* $a_{۳۲}=۱\neq ۰=a_{۲۲}$ *و با انجام* $R_۲\leftrightarrow R_۳$ *داریم*

$$S=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ & -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$l_{۳۲}=\frac{a_{۳۲}}{a_{۲۲}}=\frac{۰}{۱}=۰,\qquad R_۳\leftarrow R_۳$$
$$l_{۴۲}=\frac{a_{۴۲}}{a_{۲۲}}=\frac{-۲}{۱}=-۲,\qquad R_۴\leftarrow R_۴+۲R_۲$$

بنابراین

$$S=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۴ & -۴ \end{bmatrix}.$$

در آخر برای $j=۳$ *داریم* $r=۳$ *زیرا* $a_{۳۳}=۲\neq ۰$*. پس*

$$l_{۴۳}=\frac{a_{۴۳}}{a_{۳۳}}=\frac{۲}{۲}=۱,\qquad R_۴\leftarrow R_۴-R_۳$$

و در نتیجه

$$S = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ & -۴ \end{bmatrix}.$$

حال چون $a_{۴۴} = -۲ \neq ۰$ بنابراین

$$l_{۳۴} = \frac{a_{۳۴}}{a_{۴۴}} = \frac{-۲}{-۲} = ۱, \qquad R_۳ \leftarrow R_۳ - R_۴$$
$$l_{۲۴} = \frac{a_{۲۴}}{a_{۴۴}} = \frac{-۱}{-۲} = \frac{۱}{۲}, \qquad R_۲ \leftarrow R_۲ - \frac{۱}{۲}R_۴$$
$$l_{۱۴} = \frac{a_{۱۴}}{a_{۴۴}} = \frac{۱}{-۲} = -\frac{۱}{۲}, \qquad R_۱ \leftarrow R_۱ + \frac{۱}{۲}R_۴$$

و داریم

$$S = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ & -۴ \end{bmatrix}.$$

سپس چون $a_{۳۳} = ۲ \neq ۰$ با انجام اعمال

$$l_{۲۳} = \frac{a_{۲۳}}{a_{۳۳}} = \frac{۱}{۲}, \qquad R_۲ \leftarrow R_۲ - \frac{۱}{۲}R_۳$$
$$l_{۱۳} = \frac{a_{۱۳}}{a_{۳۳}} = \frac{-۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}, \qquad R_۱ \leftarrow R_۱ + \frac{۱}{۲}R_۳$$

خواهیم داشت

$$S = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ & -۴ \end{bmatrix}.$$

در آخر چون $a_{۲۲} = ۱ \neq ۰$ با انجام عمل

$$l_{۱۲} = \frac{a_{۱۲}}{a_{۲۲}} = \frac{۱}{۱} = ۱, \qquad R_۱ \leftarrow R_۱ - R_۲$$

داریم

$$S = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ & -۴ \end{bmatrix}$$

در پایان خواهیم داشت

$$x_۱ = \frac{۲}{۱} = ۲, \qquad x_۲ = \frac{-۱}{۱} = -۱, \qquad x_۳ = \frac{۴}{۲} = ۲, \qquad x_۴ = \frac{-۴}{-۲} = ۲.$$

$\triangle$

تذکر ۵.۶ همانند روش حذف گاوسی، هنگام کار با حساب ممیز شناور باید در روش حذفی گاوس-جردن نیز از محورگیری مناسبی استفاده کرد.

تذکر ۶.۶ روش حذفی گاوس-جردن به جای‌گذاری پسرو/پیشرو نیازی ندارد و حجم عملیات آن دو برابر روش حذف گاوسی است و به همین دلیل در عمل برای حل دستگاه، کمتر از آن استفاده می‌شود و با توجه به فرآیند زیر بیشتر برای یافتن وارون ماتریس از آن استفاده می‌شود. اگر B وارون ماتریس $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ باشد آن‌گاه از $AB = I$ خواهیم داشت

$$A[B_۱ \ B_۲ \cdots B_n] = [e_۱ \ e_۲ \cdots e_n]$$

و از آن‌جا

$$AB_i = e_i, \qquad i = ۱, \ldots, n$$

و اگر این n دستگاه را با روش حذفی گاوس-جردن حل کنیم ستون‌های B مشخص می‌شوند. اما چون ماتریس ضرایب این n دستگاه یکسان است، در عمل به کمک اعمال سطری مقدماتی ماتریس افزوده $[A \ I]$ را در صورت امکان به ماتریس افزوده $[I \ B]$ تبدیل می‌کنیم.

مثال ۴.۶ آیا ماتریس داده‌شده وارون‌پذیر است؟

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس افزوده‌ای به صورت

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

ساخته و روش گاوس-جردن را دنبال می‌کنیم. با صفرسازی درایه‌های زیر قطر ستون اول داریم

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۲ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & -۴ & -۳ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

سپس درایه‌های زیر قطر ستون دوم را صفر کرده، خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۲ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & ۱ \end{array}\right]$$

چون ادامه کار امکان‌پذیر نیست، ماتریس داده شده وارون‌پذیر نیست. △

مثال ۵.۶ *وارون ماتریس داده‌شده را بیابید.*

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس افزوده‌ای به صورت

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

ساخته و درایه‌های زیر قطر ستون اول را صفر کرده، خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۲ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

سپس درایه‌های زیر قطر ستون دوم را صفر کرده، داریم

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۲ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & -۱ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

سطر سوم را به ۳ تقسیم کرده سپس درایه‌های بالای قطر ستون سوم را صفر کرده، خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۰ & \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & -۳ & ۰ & -\frac{۴}{۳} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{array}\right]$$

حال سطر دوم را به ۳− تقسیم کرده سپس داریه بالای قطر ستون دوم را صفر کرده، خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

△

۳.۱.۶ تجزیه مثلثی

تعریف ۳.۶ *فرض کنید ماتریس A را به صورت $A = LU$ تجزیه کرده باشیم. اگر L ماتریسی پایین‌مثلثی و U ماتریسی بالامثلثی باشد چنین تجزیه‌ای به تجزیه مثلثی*[14] *معروف است.*

قضیه ۱.۶ *اگر در اِعمال روش حذف گاوسی بر روی دستگاه $Ax = b$ نیازی به جابجایی سطر نباشد آن‌گاه برای ماتریس A یک تجزیه مثلثی به صورت $A = LU$ موجود است که در آن*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \bigcirc \\ l_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

تذکر ۷.۶ *اگر تجزیه مثلثی ماتریس ضرایب دستگاه $Ax = b$ به صورت $A = LU$ در دسترس باشد آن‌گاه داریم $LUx = b$. از حل دستگاه $Ly = b$ با جای‌گذاری پیشرو y را به دست آورده سپس x از حل دستگاه $Ux = y$ با جای‌گذاری پسرو تعیین می‌شود. همچنین* $\det A = \det L \det U = \det U$.

مثال ۶.۶ *با انجام اعمال* $E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$، $E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1$، $E_4 \leftarrow E_4 + E_1$، $E_3 \leftarrow E_3 - 4E_2$ و $E_4 \leftarrow E_4 + 3E_2$ بر روی دستگاه

$$\begin{cases} E_1 : & x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ E_2 : & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ E_3 : & 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ E_4 : & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

[14] triangular decomposition(factorization)

خواهیم داشت

$$\begin{cases} E_1: & x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ E_2: & -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ E_3: & 3x_3 + 13x_4 = 13 \\ E_4: & -13x_4 = -13 \end{cases}$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}=LU$$

بنابراین $\det(A)=\det(U)=1\times -1\times 3\times -13=39$ *و برای حل دستگاه*

$$Ax=LUx=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ابتدا دستگاه

$$Ly=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

را باجای‌گذاری پیشرو حل کرده داریم

$$y_1=4, \qquad y_2=1-2y_1=-7,$$
$$y_3=-3-3y_1-4y_2=13, \qquad y_4=4+y_1+3y_2=-13.$$

سپس از حل دستگاه

$$Ux=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{bmatrix}$$

باجای‌گذاری پسرو خواهیم داشت

$$x_4 = 1, \qquad x_3 = 13 - 13x_4 = 0,$$
$$x_2 = 7 - x_3 - 5x_4 = 2, \qquad x_1 = 4 - x_2 - 3x_4 = -1.$$

$\triangle$

تعریف ۴.۶ *یک زیرماتریس اصلی*[15] *از ماتریس* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *ماتریسی به صورت زیر است*

$$\begin{bmatrix} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \cdots & a_{i_1,i_k} \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \cdots & a_{i_2,i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,i_1} & a_{i_k,i_2} & \cdots & a_{i_k,i_k} \end{bmatrix}$$

که در آن $1 \le k \le n$ *و* $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. *هم‌چنین یک زیرماتریس اصلی پیشرو*[16] *مرتبه* k $(1 \le k \le n)$ *از ماتریس* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *ماتریسی به صورت زیر است*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

قضیه ۲.۶ (تجزیه مثلثی) *فرض کنید* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *ماتریسی وارون‌پذیر باشد.* A *تجزیه‌ای یکتا به صورت* $A = LU$ *دارد که در آن* L *ماتریسی پایین مثلثی با درایه‌های قطری ۱ و* U *ماتریسی بالا مثلثی است اگر و فقط اگر تمام زیرماتریس‌های اصلی پیشرو* A *وارون‌پذیر باشند.*

نتیجه ۱.۲.۶ *تحت شرایط قضیه ۲.۶ ماتریس* A *تجزیه‌ای یکتا به صورت*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \bigcirc \\ l_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & & & \bigcirc \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & u_{n-1,n} \\ \bigcirc & & & 1 \end{bmatrix} = LDU$$

---

[15] principal submatrix

[16] leading principal submatrix

دارد و به علاوه اگر A ماتریسی متقارن باشد آن‌گاه

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & & & \bigcirc \\ l_{۲۱} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n۱} & \cdots & l_{n,n-۱} & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{۱۱} & & & \bigcirc \\ & d_{۲۲} & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & l_{۲۱} & \cdots & l_{n۱} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & l_{n,n-۱} \\ \bigcirc & & & ۱ \end{bmatrix}=LDL^T.$$

در ادامه قصد داریم مسئله تجزیه مثلثی را به طور مستقیم مورد بررسی قرار دهیم.
فرض کنید ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ داده شده باشد و بخواهیم ماتریس پایین‌مثلثی $L=[l_{ij}]_{n\times n}$ و ماتریس بالامثلثی $U=[u_{ij}]_{n\times n}$ را چنان بیابیم که $A=LU$. بنابراین باید داشته باشیم

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{۱۱} & & \bigcirc \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n۱} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{۱۱} & \cdots & u_{۱n} \\ & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

که از آن‌جا $n^۲$ معادله به شکل

$$a_{ij}=\sum_{p=۱}^{\min\{i,j\}} l_{ip}u_{pj},\qquad i,j=۱,\ldots,n$$

به دست می‌آید که در آن $n^۲+n$ مجهول (درایه‌های L و U) ظاهر شده است. با قرار دادن $l_{ii}=۱$ برای $i=۱,\ldots,n$، تعداد مجهولات به $n^۲$ مجهول کاهش یافته، خواهیم داشت

$$\begin{cases} u_{ij}=a_{ij}-\displaystyle\sum_{p=۱}^{i-۱} l_{ip}u_{pj}, & ۱\le i\le j\le n \\ l_{ij}=\frac{۱}{u_{jj}}\left(a_{ij}-\displaystyle\sum_{p=۱}^{j-۱} l_{ip}u_{pj}\right), & ۱\le j< i\le n \end{cases}\tag{۱.۶}$$

دولیتل[۱۷]، طرز استفاده از (۱.۶) را به طور ماهرانه‌ای در الگوریتم زیر خلاصه کرده است.

الگوریتم تجزیه مثلثی دولیتل

- **ورودی.** ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$
- **خروجی.** ماتریس بالامثلثی $U=[u_{ij}]_{n\times n}$ و ماتریس پایین‌مثلثی $L=[l_{ij}]_{n\times n}$ با درایه‌های قطری ۱ به طوری که $A=LU$

۱) برای $i=۱,\ldots,n$ قرار دهید $l_{ii}=۱$

۲) برای $k=۱,\ldots,n$ گام‌های ۳ و ۴ را تکرار کنید

---
[۱۷] Doolittle

۳) برای $j=k,\dots,n$ قرار دهید $u_{kj}=a_{kj}-\sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}u_{pj}$

۴) برای $i=k+1,\dots,n$ قرار دهید $l_{ik}=\frac{1}{u_{kk}}\left(a_{ik}-\sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}u_{pk}\right)$

در این الگوریتم به ازای هر k ابتدا عناصر $u_{kk},\dots,u_{kn}$ محاسبه شده و سپس عناصر $l_{k+1,k},\dots,l_{nk}$ به دست می‌آیند. کروت[۱۸] به طریقی مشابه اما متفاوت، نحوه استفاده از (۱.۶) را به این صورت تغییر داد که ابتدا عناصر $u_{1k},\dots,u_{kk}$ محاسبه شده و سپس عناصر $l_{k+1,k},\dots,l_{nk}$ به دست می‌آیند. این کار هنرمندانه در الگوریتم زیر خلاصه شده است.

الگوریتم تجزیه مثلثی کروت

- **ورودی.** ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$
- **خروجی.** ماتریس بالامثلثی $U=[u_{ij}]_{n\times n}$ و ماتریس پایین‌مثلثی $L=[l_{ij}]_{n\times n}$ با درایه‌های قطری ۱ به طوری که $A=LU$

۱) برای $i=1,\dots,n$ قرار دهید $l_{ii}=1$

۲) برای $j=1,\dots,n$ گام‌های ۳ و ۴ را تکرار کنید

۳) برای $i=1,\dots,j$ قرار دهید $u_{ij}=a_{ij}-\sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}u_{pj}$

۴) برای $i=j+1,\dots,n$ قرار دهید $l_{ij}=\frac{1}{u_{jj}}\left(a_{ij}-\sum_{p=1}^{j-1} l_{ip}u_{pj}\right)$

مثال ۷.۶ *با دنبال کردن مراحل هر یک از دو الگوریتم، به راحتی تجزیه مثلثی ماتریس*

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&-2&4&0\\1&2&5&-1\\1&-1&0&1\end{bmatrix}$$

به صورت زیر به دست می‌آید.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&-2&4&0\\1&2&5&-1\\1&-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&1&-4\\0&0&2&-5\\0&0&0&-9\end{bmatrix}=LU$$

$\triangle$

[۱۸] Crout

تذکر ۸.۶ *هنگام کار با حساب ممیز شناور باید از محورگیری مناسب استفاده کرد. همچنین به سادگی می‌توان نشان داد حجم عملیات تجزیه مثلثی دولیتل (کروت) $O(n^3)$ است.*

تعریف ۵.۶ *ماتریس $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ را غالب قطری سطری[۱۹] گویند هرگاه*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i\neq j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \ldots, n$$

و اگر برابری برقرار نباشد به آن غالب قطری سطری اکید[۲۰] گفته می‌شود. از این به بعد منظور از غالب قطری (اکید) همان غالب قطری سطری (اکید) است.

مثال ۸.۶ *A یک ماتریس غالب قطری اکید و B یک ماتریس غالب قطری است.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & -3 & -4 & 10 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\triangle$

قضیه ۳.۶ *فرض کنید $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس غالب قطری اکید باشد. A وارون‌پذیر است، روش حذف گاوسی را می‌توان روی هر دستگاه خطی با ماتریس ضرایب A بدون نیاز به جابجایی سطر اِعمال نمود و محاسبات نسبت به رشد خطای گرد کردن پایدار است.*

۲.۶ روش‌های تکراری

روش‌های تکراری بر خلاف روش‌های مستقیم روندی نامتناهی دارند و حتی اگر خطای گرد کردن هم وجود نداشته باشد، جواب تقریبی تولید می‌کنند. هم‌گرایی و حجم عملیات دو معیار برای مقایسه این روش‌ها است. اما برای تعریف هم‌گرایی به مفاهیمی چون نرم[۲۱]، فاصله[۲۲] و غیره نیاز است.

۱.۲.۶ نرم برداری و ماتریسی

تعریف ۶.۶ *یک نرم برداری روی $\mathbb{R}^n$ تابعی مانند $\|\cdot\|$ از $\mathbb{R}^n$ به توی $\mathbb{R}$ با خواص زیر است*

---

[۱۹] row diagonally dominant

[۲۰] strictly row diagonally dominant

[۲۱] norm

[۲۲] distance

آ- به ازای هر x در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\|x\| \geq ۰$

ب- $\|x\| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$

پ- به ازای هر x در $\mathbb{R}^n$ و به ازای هر α در $\mathbb{R}$ داشته باشیم $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

ت- (نابرابری مثلثی) به ازای هر x و y در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

و اگر از $\|x\| = ۰$ نتیجه نشود $x = ۰$ آن‌گاه $\|\cdot\|$ را نیم-نرم[۲۳] نامند. پس از تعریف نرم، بلافاصله می‌توان فاصله بین دو بردار x و y در $\mathbb{R}^n$ را به صورت $\|x - y\|$ تعریف کرد.

مثال ۹.۶ فرض کنید $x = [x_i]_{n\times ۱}$ برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد. توابع

$$\begin{cases} \|x\|_p = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}}, & ۱ \leq p < \infty \\ \|x\|_\infty = \max_{۱\leq i\leq n} |x_i| \end{cases}$$

نرم‌های برداری متداولی روی $\mathbb{R}^n$ هستند. $\|\cdot\|_p$ به نرم p، $\|\cdot\|_۲$ به نرم اقلیدسی[۲۴] و $\|\cdot\|_\infty$ به نرم ماکزیمم (نرم یکنواخت)[۲۵] معروف هستند. $\triangle$

تعریف ۷.۶ فرض کنید $\{x^{(k)}\}_{k=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از بردارهای $\mathbb{R}^n$ و x برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد. x را حد دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=۱}^{\infty}$ نامیده و می‌نویسیم $x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ هرگاه

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, \qquad i = ۱, \ldots, n$$

که در آن $x = [x_i]_{n\times ۱}$ و $x^{(k)} = [x_i^{(k)}]_{n\times ۱}$. با توجه به ارتباط تناتنگ حد برداری و حد اسکالری، بررسی برقراری خواصی نظیر منحصر به فرد بودن حد، خاصیت خطی داشتن حد و غیره چندان سخت نیست.

قضیه ۴.۶ با این فرض که $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ و $\lim_{k\to\infty} y^{(k)} = y$ به ازای هر دو اسکالر دل‌خواه α و β داریم

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha x^{(k)} + \beta y^{(k)}) = \alpha x + \beta y.$$

بسیاری از خواص حد در $\mathbb{R}$ را می‌توان به $\mathbb{R}^n$ تعمیم داد (مشابه قضیه اخیر) ولی بعضی از احکام مانند قضیه فشار (ساندویچ) قابل تعمیم نیستند و در این راستا تعریف زیر راه‌گشا است.

تعریف ۸.۶ دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=۱}^{\infty}$ از بردارهای در $\mathbb{R}^n$ هم‌گرا به بردار x در $\mathbb{R}^n$ نسبت به نرم برداری $\|\cdot\|$ گفته می‌شود و می‌نویسیم

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^{(k)} - x\right\| = ۰$$

[۲۳] semi-norm
[۲۴] Euclidean norm
[۲۵] maximum norm (uniform norm)

هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ داده‌شده عدد صحیح N_ϵ چنان موجود باشد که

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| < \epsilon, \qquad \forall k \geq N_\epsilon.$$

قضیه ۵.۶ *فرض کنید $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از بردارهای $\mathbb{R}^n$ و x برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد.*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^{(k)} - x\right\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$$

تعریف ۹.۶ یک *نرم ماتریسی تابعی مانند $\|\cdot\|$ از $\mathbb{R}^{n\times n}$ به توی $\mathbb{R}$ با خواص زیر است*

آ_ *به ازای هر A در $\mathbb{R}^{n\times n}$ داشته باشیم $\|A\| \geq 0$*

ب_ *$\|A\| = 0$ اگر و فقط اگر $A = 0$*

پ_ *به ازای هر A در $\mathbb{R}^{n\times n}$ و به ازای هر α در $\mathbb{R}$ داشته باشیم $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$*

ت_ *(نابرابری مثلثی) به ازای هر A و B در $\mathbb{R}^{n\times n}$ داشته باشیم $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$*

مثال ۱۰.۶ *فرض کنید $A = [a_{ij}]$ ماتریس دلخواهی در $\mathbb{R}^{n\times n}$ باشد. توابع*

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

نرم‌های ماتریسی متداولی روی $\mathbb{R}^{n\times n}$ هستند. $\|\cdot\|_F$ به نرم فروبنیوس[۲۶] معروف است. $\triangle$

تعریف ۱۰.۶ *عدد λ یک مقدار ویژه[۲۷] برای ماتریس A نامیده می‌شود هرگاه بردار مخالف صفر x چنان وجود داشته باشد که $Ax = \lambda x$. در این حالت x بردار ویژه[۲۸] نظیر λ نامیده می‌شود. مجموعه‌ای که شامل تمام مقدارهای ویژه ماتریس A باشد به طیف[۲۹] A معروف است و با $\sigma(A)$ نمایش داده می‌شود. شعاع طیفی[۳۰] ماتریس A که با $\rho(A)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از $\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$.*

۲.۲.۶ روش‌های مبتنی بر تفکیک ماتریسی

در یک روش تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$، ابتدا دستگاهی معادل به صورت $x = Tx + c$ ساخته شده و سپس با انتخاب بردار آغازی $x^{(0)}$ دنباله‌ای از بردارها، از طرح تکراری $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ تولید می‌شود. در واقع با یک ماتریس T و یک بردار c، می‌توان یک روش تکراری ساخت. بنابراین تفاوت روش‌های تکراری در ماتریس

[۲۶] Frobenius norm
[۲۷] eigenvalue
[۲۸] eigenvector
[۲۹] spectrum
[۳۰] spectral radius

T و بردار c است. یک روش مهم برای تبدیل دستگاه $Ax = b$ به دستگاه $x = Tx + c$، استفاده از فن تفکیک (شکافت) ماتریس[۳۱] A است. برای این کار ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

را به صورت $A = D - L - U$ تفکیک می‌کنیم که در آن $D = \mathrm{diag}[a_{۱۱}, \ldots, a_{nn}]$ و

$$L = \begin{bmatrix} ۰ & & & \bigcirc \\ -a_{۲۱} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n۱} & \cdots & -a_{n,n-۱} & ۰ \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} ۰ & -a_{۱۲} & \cdots & -a_{۱n} \\ & ۰ & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-۱,n} \\ \bigcirc & & & ۰ \end{bmatrix}.$$

بنابراین $Ax = b$ معادل است با $(D - L - U)x = b$ و از آن‌جا خواهیم داشت

$$\begin{cases} Dx = (L + U)x + b \\ (D - L)x = Ux + b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = D^{-۱}(L + U)x + D^{-۱}b \\ x = (D - L)^{-۱}Ux + (D - L)^{-۱}b \end{cases}$$

بنابراین می‌توان دو طرح تکراری به صورت زیر ساخت

$$\begin{cases} x^{(k)} = T_j\, x^{(k-۱)} + c_j \\ x^{(k)} = T_g\, x^{(k-۱)} + c_g \end{cases} \qquad k = ۱, ۲, \ldots$$

که در طرح تکراری اول که به روش تکراری ژاکوبی[۳۲] معروف است $T_j = D^{-۱}(L + U)$ و $c_j = D^{-۱}b$ و در طرح تکراری دوم که به روش تکراری گاوس-سیدل[۳۳] معروف است $T_g = (D - L)^{-۱}U$ و $c_g = (D - L)^{-۱}b$. شکل جبری این روش‌ها به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x_i^{(k)} = \dfrac{b_i - \sum_{i \neq j = ۱}^{n} a_{ij} x_j^{(k-۱)}}{a_{ii}} \\ x_i^{(k)} = \dfrac{b_i - \sum_{j=۱}^{i-۱} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+۱}^{n} a_{ij} x_j^{(k-۱)}}{a_{ii}} \end{cases} \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n \quad k = ۱, ۲, \ldots$$

تذکر ۹.۶ *برای آن‌که این روش‌ها خوش تعریف باشند باید برای $i = ۱, \ldots, n$ داشته باشیم $a_{ii} \neq ۰$.*

[۳۱] matrix spliting

[۳۲] Jacobi iterative method

[۳۳] Gauss-Seidel iterative method

تذکر ۱۰.۶ *یکی از شرایط زیر را می‌توان به عنوان شرط توقف روش‌های تکراری برگزید.*

$$\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|<\epsilon,\quad \frac{\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|}{\left\|x^{(k)}\right\|}<\epsilon,\quad \left\|r^{(k)}=Ax^{(k)}-b\right\|<\epsilon,\quad k\le K$$

مثال ۱۱.۶ *ابتدا دستگاه*

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6\\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25\\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11\\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} + \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3\\ x_2 = \frac{25}{11} + \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4\\ x_3 = -\frac{11}{10} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4\\ x_4 = \frac{15}{8} - \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \end{cases}$$

اگر بخواهیم روش تکراری ژاکوبی را به کار ببریم به صورت زیر اندیس‌گذاری می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{3}{5} + \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{5}x_3^{(k-1)}\\ x_2^{(k)} = \frac{25}{11} + \frac{1}{11}x_1^{(k-1)} + \frac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \frac{3}{11}x_4^{(k-1)}\\ x_3^{(k)} = -\frac{11}{10} - \frac{1}{5}x_1^{(k-1)} + \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} + \frac{1}{10}x_4^{(k-1)}\\ x_4^{(k)} = \frac{15}{8} - \frac{3}{8}x_2^{(k-1)} + \frac{1}{8}x_3^{(k-1)} \end{cases}$$

به ازای بردار آغازی $x^{(0)}=[0\ 0\ 0\ 0]^T$ پنج تکرار از این روش در جدول ۱.۶ آمده است. اگر بخواهیم روش تکراری گاوس-سیدل را به کار ببریم به صورت زیر اندیس‌گذاری می‌کنیم.

k	۱	۲	۳	۴	۵
$x_1^{(k)}$	۰٫۶۰۰۰	۱٫۰۴۷۳	۰٫۹۳۲۶	۱٫۰۱۵۲	۰٫۹۸۹۰
$x_2^{(k)}$	۲٫۲۷۲۷	۱٫۷۱۵۹	۲٫۰۵۳۰	۱٫۹۵۳۷	۲٫۰۱۱۴
$x_3^{(k)}$	−۱٫۱۰۰۰	−۰٫۸۰۵۲	−۱٫۰۴۹۳	−۰٫۹۶۸۱	−۱٫۰۱۰۳
$x_4^{(k)}$	۱٫۸۷۵۰	۰٫۸۸۵۲	۱٫۱۳۰۹	۰٫۹۷۳۹	۱٫۰۲۱۴

جدول ۱.۶: تکرارهای روش ژاکوبی

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{3}{5} + \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{5}x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = \frac{25}{11} + \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \frac{3}{11}x_4^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = -\frac{11}{10} - \frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k-1)} \\ x_4^{(k)} = \frac{15}{8} - \frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} \end{cases}$$

به ازای بردار آغازی $x^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ *پنج تکرار از این روش در جدول ۲.۶ آمده است.* △

k	۱	۲	۳	۴	۵
$x_1^{(k)}$	۰/۶۰۰۰	۱/۰۳۰۰	۱/۰۰۶۵	۱/۰۰۰۹	۱/۰۰۱۰
$x_2^{(k)}$	۲/۳۲۷۲	۲/۰۳۷۰	۲/۰۰۳۶	۲/۰۰۰۳	۲/۰۰۰۰
$x_3^{(k)}$	−۰/۹۸۷۳	−۱/۰۱۴۰	−۱/۰۰۲۵	−۱/۰۰۰۳	−۱/۰۰۰۰
$x_4^{(k)}$	۰/۸۷۸۹	۰/۹۸۴۴	۰/۹۹۸۳	۰/۹۹۹۹	۱/۰۰۰۰

جدول ۲.۶: تکرارهای روش گاوس-سیدل

مثال ۱۲.۶ *نتایج مثال قبل دلالت بر آن دارد که روش تکراری گاوس-سیدل بهتر از روش تکراری ژاکوبی است. گرچه این مطلب در بیشتر حالات درست است ولی روش گاوس-سیدل در حل دستگاه زیر شکست می‌خورد (با بردار آغازی* $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$ *تا ۲۵ تکرار هم تقریب خوبی تولید نمی‌کند) حال آن‌که روش ژاکوبی خیلی زود هم‌گرا می‌شود (بررسی کنید)*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

△

قضیه ۶.۶ *برای هر بردار* $x^{(0)}$ *در* $\mathbb{R}^n$ *دنباله* $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ *تولیدشده از طرح تکراری*

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

به جواب یکتای معادله $x = Tx + c$ *هم‌گرا است اگر و فقط اگر* $\rho(T) < 1$.

قضیه ۷.۶ *اگر برای یک نرم ماتریسی طبیعی داشته باشیم* $\|T\| < 1$ *و* c *بردار دل‌خواهی در* $\mathbb{R}^n$ *باشد آن‌گاه دنباله* $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ *تولیدشده توسط*

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

به ازای هر $x^{(0)}$ *در* $\mathbb{R}^n$ *به برداری مثل* x *در* $\mathbb{R}^n$ *هم‌گرا است و به علاوه کران‌های زیر برقرارند.*

$$\begin{cases} \|x - x^{(k)}\| \le \|T\|^k \|x - x^{(0)}\| \\ \|x - x^{(k)}\| \le \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \end{cases}$$

قضیه ۸.۶ *اگر A ماتریسی غالب قطری اکید در $\mathbb{R}^{n\times n}$ باشد، آن‌گاه روش‌های ژاکوبی و گاوس-سیدل به ازای هر بردار آغازی $x^{(0)}$ در $\mathbb{R}^n$ هم‌گرا هستند.*

تذکر ۱۱.۶ *با توجه به قضیه قبل به نظر می‌رسد بهتر است برای حل دستگاهی مانند*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \\ -5x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

ابتدا آن را به صورت

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

بازنویسی کرده و سپس به کمک روش‌های ژاکوبی یا گاوس-سیدل آن را حل کنیم.

۳.۶ آنالیز خطا

به نظر می‌رسد که اگر $\tilde{x}$ جواب تقریبی دستگاه $Ax = b$ باشد و نرم بردار باقی‌مانده نظیر یعنی $\|r\| = \|b - A\tilde{x}\|$ کوچک باشد آن‌گاه $\|x - \tilde{x}\|$ هم کوچک باشد ولی دستگاه‌هایی وجود دارند که این خاصیت برای آن‌ها برقرار نیست.

مثال ۱۳.۶ دستگاه

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3{,}0001 \end{bmatrix}$$

دارای جواب واقعی $x = [1\ 1]^T$ است و بردار باقی‌مانده نظیر تقریب ضعیف $\tilde{x} = [3\ 0]^T$ به قرار زیر است

$$r = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3{,}0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}0002 \end{bmatrix}.$$

کوچک بودن نرم بردار باقی‌مانده یعنی $\|r\|_\infty = 0{,}0002$ دلیلی بر خوب بودن تقریب نیست زیرا $\|x - \tilde{x}\|_\infty = 2$. $\triangle$

قضیه ۹.۶ *در نظر بگیرید که A ماتریسی وارون‌پذیر، $\tilde{x}$ جواب تقریبی دستگاه $Ax = b$ و r بردار باقی‌مانده نظیر $\tilde{x}$ باشد. آن‌گاه به ازای هر نرم طبیعی داریم*

$$\|x - \tilde{x}\| \le \|r\| \left\|A^{-1}\right\|$$

و اگر $x \ne 0 \ne b$ آن‌گاه

$$\frac{1}{\|A\| \|A^{-1}\|} \frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

تعریف ۱۱.۶ عدد وضعیت[۳۴] *ماتریس وارون‌پذیر* A نسبت به نرم $\|\cdot\|$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\kappa(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$$

و اگر A *ماتریسی وارون‌پذیر نباشد قرار می‌دهیم* $\kappa(A) = \infty$.

تذکر ۱۲.۶ *برای هر ماتریس وارون‌پذیر دل‌خواه* A *و هر نرم ماتریسی طبیعی داریم* $\kappa(A) \geq 1$ *زیرا*

$$1 = \|I\| = \left\|AA^{-1}\right\| \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| = \kappa(A).$$

تذکر ۱۳.۶ *با توجه به تعریف عدد وضعیت، نابرابری‌های قضیه قبل به صورت زیر بازنویسی می‌شوند*

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|A\|}$$

و اگر $b \neq 0 \neq x$ *آن‌گاه*

$$\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

بنابراین مسئله $Ax = b$ *خوش‌وضع است هرگاه* $\kappa(A)$ *به ۱ نزدیک باشد و هر چه* $\kappa(A)$ *از ۱ دورتر باشد مسئله بدوضع‌تر خواهد شد.*

مثال ۱۴.۶ *در مثال قبل داریم*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$$

که برای آن $\|A\|_\infty = 3.0001$ *چندان بزرگ نیست ولی برای*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{bmatrix}$$

داریم $\|A^{-1}\|_\infty = 20000$ *و از آن‌جا* $\kappa(A) = 3.0001 \times 20000 = 60002$. $\triangle$

این بخش را با قضیه‌ای در رابطه با اثر اختلالات جزیی داده‌های ورودی، روی جواب دستگاه $Ax = b$ به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۱۰.۶ *فرض کنید* A *ماتریسی وارون‌پذیر،* $b \neq 0$ *و* $x \neq 0$ *جواب دستگاه* $Ax = b$ *باشد. اگر بردار سمت راست و ماتریس ضرایب را به صورت* $b + \delta b$ *و* $A + \delta A$ *مختل کرده باشیم و* $\tilde{x}$ *جواب نظیر باشد یعنی* $(A + \delta A)\tilde{x} = b + \delta b$ *و*

$$\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

---

[۳۴] condition number

آن‌گاه

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)\,\|A\|}{\|A\|-\kappa(A)\,\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

تمرین

۱. فرض کنید ماشین حسابی با دقت $4S$ در اختیار است. به کمک روش حذف گاوسی با جای‌گذاری پسرو دستگاه داده‌شده را یک بار بدون محورگیری جزیی و یک بار با محورگیری جزیی حل کنید.

$$\begin{cases} E_1 : & 0/003000x_1 + 59/14x_2 = 59/17 \\ E_2 : & 5/291x_1 - 6/130x_2 = 46/78 \end{cases}$$

۲. با این فرض که یک ماشین حساب با دقت $3S$ در اختیار داریم، دستگاه داده‌شده را یک بار با محورگیری جزیی و یک بار بدون آن حل کنید.

$$\begin{cases} E_1 : & 2/11x_1 - 4/21x_2 + 0/921x_3 = 2/01 \\ E_2 : & 4/01x_1 + 10/2x_2 - 1/12x_3 = -3/09 \\ E_3 : & 1/09x_1 + 0/987x_2 + 0/832x_3 = 4/21 \end{cases}$$

جواب واقعی عبارت است از $x_1=-0/428,\quad x_2=0/427,\quad x_3=5/11$.

۳. در روش حذف گاوسی با محورگیری جزئی برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$، a_{33} در پایان روش کدام است؟ الف) ۱ ب) ۰ ج) ۱- د) ۲

۴. جواب دستگاه $Ax=b$ کدام گزینه است اگر بدانیم ماتریس A پس از اینکه سطرهای دوم، سوم و چهارم را به ترتیب با $\frac{1}{2}$ برابر، ۲- برابر و ۱ برابر سطر اول جمع کرده و سپس سطر چهارم را با ۲- برابر سطر دوم و $-\frac{1}{2}$ برابر سطر سوم جمع کنیم به ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/5 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ تبدیل شود و $b=\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix}$.

الف) $\begin{bmatrix} \frac{248}{15} & -\frac{146}{5} & \frac{72}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}^t$ ب) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t$

ج) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}^t$ د) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{72}{5} & -\frac{146}{5} & \frac{248}{15} \end{bmatrix}^t$

۵. در تجزیه LU ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ کدام گزینه درست است؟

الف) $L=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ب) $L=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

ج) $L=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ د) وجود ندارد.

۶. دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} ۶ax_۱ + ۳ax_۲ + ۲ax_۳ &= ۱ \\ x_۱ - ۳ax_۲ + ۴x_۳ &= ۲ \\ x_۱ + x_۲ - ۲ax_۳ &= ۳ \end{cases}$$

الف) به ازای چه مقادیری از a در روش حذف گاوسی با محورگیری جزئی نیازی به جابجایی سطر نیست؟

ب) به ازای $a = ۲$ چند تکرار روش گاوس-سیدل لازم است تا با انتخاب بردار آغازی صفر جوابی با دقت $۲D$ به دست آوریم؟

۷. در تجزیه LU ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۱ \\ -۳ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ مقدار $u_{۳۳}$ کدام است؟ الف) $\frac{۷}{۳}$ ب) $-\frac{۷}{۳}$ ج) $-\frac{۳۸}{۳}$ د) $\frac{۳۸}{۳}$

۸. فرض کنید $A = LU$ که در آن $L=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $U=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۵ & ۰/۵ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$. مقدار $\det A$ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۳- ج) ۱- د) ۱

۹. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد روش حذف گاوسی برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$ نادرست است؟

الف) اگر $a_{۱۱} = ۰$، این روش را نمی‌توان به کار برد.

ب) بدون استفاده از محورگیری جزئی ممکن است جواب‌های حاصل از این روش دقیق نباشند.

ج) اگر خطای گردکردن وجود نداشته باشد، این روش جواب دقیق را به دست می‌دهد.

د) ماتریس بالامثلثی حاصل از این روش به بردار سمت راست b بستگی ندارد.

۱۰. دستگاه خطی زیر را در نظر بگیرید. دترمینان ماتریس ضرایب را به کمک تجزیه LU به دست آورید.

$$\begin{cases} ۲x_۱ - x_۲ - ۶x_۳ &= -۲ \\ ۸x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۱۳ \\ x_۱ - ۵x_۲ - x_۳ &= -۸ \end{cases}$$

پس از اعمال شرایط کافی برای همگرایی، $X^{(۳)}$ را با استفاده از روش گاوس-سیدل، با نقطه شروع

$X^{(0)} = (1\ 0\ 1)^T$ به دست آورید. (محاسبات با دو رقم اعشار دنبال شوند). $||T_G||_\infty$ را حساب کنید. (T_G ماتریس تکرار روش گاوس–سیدل در قسمت قبل است.)

۱۱. دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

با جابجایی معادلات، دستگاه را به دستگاهی تبدیل کنید که روش گاوس–سیدل برای تعیین جواب تقریبی آن همواره همگرا باشد و سپس نتایج سه گام از این روش (یعنی $X^{(1)}$، $X^{(2)}$ و $X^{(3)}$) را با تقریب اولیه $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ به دست آورید.

۱۲. دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -1 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -2 \end{cases}$$

چند تکرار روش ژاکوبی با بردار آغازی صفر لازم است تا جوابی با خطایی کمتر از 10^{-4} به دست آید؟
چند تکرار روش گاوس–سیدل با بردار آغازی صفر لازم است تا جوابی با خطایی کمتر از 10^{-4} به دست آید؟

۱۳. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + a\,x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

الف) به ازای چه مقادیری از a در روش حذف گاوسی با محورگیری جزئی، نیازی به جابجایی سطر نیست.
ب) به ازای چه مقادیری از a، همگرایی روش گاوس–سایدل به ازای هر جواب اولیه $X^{(0)}$ تضمین‌شده است.
ج) به ازای $a = 4$ دو تکرار روش ژاکوبی را با جواب اولیه $X^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ به دست آورید (محاسبات با چهار رقم بامعنا).

۱۴. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 40x_3 = 39, \\ 10x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 20x_2 - x_3 = 21. \end{cases}$$

الف) جواب دستگاه فوق را به کمک روش حذف گاوسی با محورگیری جزئی به دست آورید.

ب) دو تکرار روش ژاکوبی را با بردار اولیه $X^{(\circ)} = [\circ, \circ, \circ]^T$ به دست آورید.

ج) با چه تغییری در دستگاه داده شده می‌توان از همگرایی روش گاوس-سیدل با هر بردار اولیه مطمئن بود؟

کتاب‌نامه

[۱] بهفروز غلامحسین و میرنیا میرکمال، نظریه و کاربرد آنالیز عددی، نوشته تیلور و دیگران (ترجمه)، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۳.

[۲] عالم‌زاده علی اکبر، بابلیان اسماعیل و امیدوار محمدرضا، آنالیز عددی، نوشته بردن و دیگران (ترجمه)، انتشارات منصوری، ۱۳۶۸.

[3] American Heritage Dictionary, 1992.

[4] Chambers 20th Century Dictionary, 1983.

[5] Henrichi P., Elements of numerical analysis, 1964.

[6] Kincaid D. and Cheney E. W., Numerical analysis, Mathematics of scientific computing, 1991.

[7] Scarborough J.B., Numerical Mathematical Analysis, 1930.

[8] Traub J., Communications of the ACM, 1972.

[9] Trefethen L. N., SIAM News, November 1992.

[10] Webster's New Collegiate Dictionary, 1973.